Glossar zur Linearen Algebra

adungierte Matrix

Es sei A eine (komplexe) (m,n)-Matrix. Dann heißt die (n,m)-Matrix B die adjungierte Matrix zu A, falls $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ für alle $i = 1,\ldots,n$ und $j = 1,\ldots,m$ gilt. Die adjungierte Matrix von A wird i.a. mit A^* bezeichnet.

affiner Raum

Es sei V ein Vektorraum, W ein Teilraum von V und w_0 ein festes Element in V. Dann heißt die Menge $w_0 + W := \{w_0 + w \,:\, w \in W\}$ affiner Raum oder *lineare Mannigfaltigkeit* in V.

ähnliche Matrizen

Zwei quadratische Matrizen A und B heißen ähnlich, wenn es eine *reguläre* Matrix X gibt mit $A = T^{-1}BT$.

algebraisches Komplement

Es sei A eine (n,n)-Matrix, es seien $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, und es sei A_{ij} die $(n-1,n-1)$-Matrix, die man aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhält. Dann heißt die Zahl $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ das algebraische Komplement oder der *Kofaktor* von a_{ij}.

algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts

Der Eigenwert α der quadratischen Matrix A besitzt die algebraische Vielfachheit k, falls das *charakteristische Polynom* $p(\lambda)$ von A durch $(\lambda-\alpha)^k$ teilbar ist, aber nicht durch $(\lambda-\alpha)^{k+1}$.

allgemeine Eigenwertaufgabe

Es seien A, B (n,n)-Matrizen. Dann versteht man unter der zugehörigen allgemeinen Eigenwertaufgabe das Problem: Bestimme $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass das lineare System $(A-\lambda B)x = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt.

Approximationssatz

Sei V ein Euklidischer Vektorraum (nicht notwendig endlicher Dimension), W ein endlich dimensionaler Teilraum von V und P die *orthogonale Projektion* von V auf W. Sei $v \in V$. Dann gilt $\|v - P(v)\| < \|v - w\|$ für alle $w \in W$ mit $w \neq P(v)$.

äquivalente Matrizen

Zwei (m,n)-Matrizen A und B heißen äquivalent, wenn es eine reguläre (m,m)-Matrix R und eine reguläre (n,n)-Matrix S gibt mit $A = R^{-1}BS$.

aufspannen

Die Vektoren $v^1,\ldots,v^m \in V$ spannen den Vektorraum V auf, wenn jedes Element von V *Linearkombination* der Vektoren $v^1,\ldots,v^m$ ist.

Ausgleichsproblem

Unter dem linearen Ausgleichsproblem versteht man die Aufgabe, bei gegebener (m,n)-Matrix A und gegebenem Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ so zu bestimmen, dass die Euklidische Länge des *Defektes* $\|Ax - b\|$ minimal wird.

Austauschsatz von Steinitz

Es sei $v^1,\ldots,v^m$ ein *Erzeugendensystem* des Vektorraums W, und es seien $w^1,\ldots,w^r \in W$ linear unabhängig. Dann gilt $r \leq m$, und es können r der Vektoren $v^1,\ldots,v^m$ in dem Erzeugendensystem durch $w^1,\ldots,w^r$ ersetzt werden.

Basis eines *endlichdimensionalen Vektorraums*

Eine Menge $v^1,\ldots,v^m \in V$ von Vektoren in einem endlichdimensionalen Vektorraum V heißt Basis von V, falls

1. $v^1,\ldots,v^m$ den Vektorraum V *aufspannen*
2. $v^1,\ldots,v^m$ *linear unabhängig* sind

Bildbereich einer Matrix

Der Bildbereich oder das Bild einer (m,n)-Matrix A ist der Teilraum $\{Ax \,:\, x \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^m$.

Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

Es sei V ein *Euklidischer Vektorraum*. Dann gilt die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

charaktristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer *quadratischen Matrix* A ist das Polynom in λ, das definiert ist durch $p(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

Cholesky Zerlegung

Sei A eine *symmetrische* und *positiv definite* Matrix. Dann gibt es eine *untere Dreiecksmatrix* L mit $A = LL^T$. Diese Zerlegung heißt die Cholesky Zerlegung von A.

Defekt

Es seien die (m,n)-Matrix A und der Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann heißt der Vektor $d := Ax - b \in \mathbb{R}^m$ der Defekt oder das *Residuum* des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

Determinante

Es sei A eine (n,n)-Matrix. Dann ist die Determinante von A definiert durch

$$\det A := \begin{cases} a_{11} & \text{, falls } n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} & \text{, falls } n > 1 \end{cases}$$

wobei A_{1j} den *Minor* von a_{1j} bezeichnet.

diagonalisierbare Matrix

Die (n,n)-Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn sie n *linear unabhängige Eigenvektoren* besitzt.

Diagonalmatrix

Eine *quadratische* Matrix A heißt Diagonalmatrix, wenn alle Elemente außerhalb der Diagonale Null sind, d.h. $a(i,j) = 0$ für $i \neq j$.

Dimension

Jede *Basis* eines *endlichdimensionalen* Vektorraumes besitzt dieselbe Anzahl von Elementen. Diese Anzahl heißt Dimension des Raumes.

direkte Summe von Teilräumen

Es seien U und W Teilräume des Vektorraumes V mit $U \cap W = \{0\}$. Dann heißt die *Summe* $U + W = \{u + w \,:\, u \in U, w \in W\}$ von U und W die direkte Summe von U und W

Dreiecksungleichung

Es sei V ein normierter Vektorraum. Dann gilt die Dreicksungleichung

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

dyadische Matrix

Eine (m,n)-Matrix A heißt dyadische Matrix, wenn es zwei Vektoren $x \in \mathbb{R}^m$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gibt mit $A = xy^T$.

Eigenraum

Ist λ ein *Eigenwert* der quadratischen Matrix A, so heißt der *Lösungsraum* des linearen, *homogenen* Gleichungssystems $(A - \lambda E)x = 0$ der Eigenraum von A zum Eigenwert λ.

Eigenvektor

Ein vom Nullvektor verschiedener Vektor x ist ein Eigenvektor der quadratischen Matrix A, wenn es einen Skalar λ gibt mit $Ax = \lambda x$.

Eigenwert

Ein Skalar λ heißt Eigenwert der quadratischen Matrix A, wenn das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)x = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt.

Eigenwertaufgabe

Es seien A, B (n,n)-Matrizen. Dann versteht man unter der zugehörigen Eigenwertaufgabe das Problem: Bestimme $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass das lineare System $(A - \lambda B)x = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt.
Zur Unterscheidung nennt dies auch die *allgemeine Eigenwertaufgabe* und den Spezialfall $B = E$ die *spezielle Eigenwertaufgabe*

Einheitsmatrix

Die (n,n)-Matrix mit den Elementen

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j \\ 0, & \text{falls} \quad i \neq j \end{cases}$$

heißt Einheitsmatrix und wird mit E bezeichnet.

elementare Zeilenoperation

Die elementaren Zeilenoperationen sind

1. Vertauschen zweier Zeilen
2. Multiplikation einer Zeile mit einem von 0 verschiedenen Skalar
3. Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

endlichdimensionaler Vektorraum

Ein Vektorraum heißt endlichdimensional, wenn er eine endliche Basis besitzt.

Entwicklung einer Determinante

Es gilt der *Laplacesche Entwicklungssatz*: Ist A eine (n,n)-Matrix, so gilt für alle $i, k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk}.$$

Die erste Formel heißt Entwicklung von $\det(A)$ nach der i-ten Zeile, die zweite Entwicklung nach der k-ten Spalte. Dabei ist $\det A_{ij}$ der Minor von a_{ij} in A.

Erhard Schmidt Norm

Es sei A eine (n,m)-Matrix. Dann heißt $\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ die Erhard Schmidt Norm oder *Schur Norm* oder *Frobenius Schmidt Norm* von A.

Erzeugendensystem

Die Vektoren $v^1, \ldots, v^m \in V$ bilden ein Erzeugendensystem des *Teilraums* W, wenn sie den Teilraum W *aufspannen*.

Euklidische Norm

Die Euklidische *Norm* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. $x \in \mathbb{C}^n$ ist definiert durch $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}$.

Euklidischer Vektorraum

Ein Vektorraum, auf dem ein *Skalarprodukt* erklärt ist, heißt Euklidischer Vektorraum.

Euklidisches Skalarprodukt

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ das Euklidische Skalarprodukt von x und y.

Frobenius Norm

Es sei A eine (n,m)-Matrix. Dann heißt $\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ die Frobenius Norm oder *Schur Norm* oder *Erhard Schmidt Norm* von A.

geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts

Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ der quadratischen Matrix A ist die *Dimension* des *Lösungsraums* von $(A - \lambda E)x = 0$.

Gramsche Matrix

Es sei V ein Euklidischer Vektorraum, und es seien $v^1, \dots, v^r \in V$. Dann heißt die Matrix $G := (\langle v^i, v^j\rangle)_{i,j=1,\dots,r}$ Gramsche Matrix zu $v^1, \dots, v^r$. G ist genau dann *regulär*, wenn $v^1, \dots, v^r$ linear unabhängig sind.

Hauptvektor

Es sei A ein (n,n)-Matrix und λ ein Eigenwert von A. Ein Vektor x heißt Hauptvektor von A zum Eigenwert λ der Stufe k, wenn $(A - \lambda E)^k x = 0$ und $(A - \lambda E)^{k-1} x \neq 0$. Ein Hauptvektor 1. Stufe ist also ein Eigenvektor.

Hermitesche Matrix

Eine quadratische (komplexe) Matrix A heißt Hermitesch, falls $A = A^*$ gilt, wenn also die Matrix A mit ihrer *adjungierten Matrix* übereinstimmt.

homogenes lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ heißt homogen, falls b der Nullvektor ist.

Householder Matrix

Es sei $u \in \mathbb{R}^n$ mit $\|u\|_2 = 1$. Dann heißt die Matrix $H = E - 2uu^T$ Householder Matrix. Die zugehörige Abbildung beschreibt eine Spiegelung an der *Hyperebene* u^T.

Hyperebene

Jeder $(n-1)$-dimensionale Teilraum eines n-dimensionalen Vektorraums V heißt Hyperebene von V.

Imaginärteil

Es sei $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl. Dann heißt b der Imaginärteil von z.

indefinit

Eine symmetrische (n,n)-Matrix A heißt indefinit, wenn sie sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt.

induzierte Norm

Es sei V ein Euklidischer Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann wird durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$ eine Norm auf V definiert, die durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierte Norm.

inkonsistent

Ein lineares Gleichungssystem heißt inkonsistent, wenn es nicht lösbar ist.

inneres Produkt

Inneres Produkt ist ein Synonym für *Skalarprodukt*

invarianter Unterraum

Es sei A ein (n,n)-Matrix. Ein Unterraum W des $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) heißt invarianter Unterraum von A, falls $Ax \in W$ für alle $x \in W$ gilt.

Inverse einer Matrix

Eine Matrix B heißt Inverse der quadratischen Matrix A, wenn $BA = AB = E$ gilt.

invertierbare Matrix

Eine quadratische Matrix heißt invertierbar, wenn sie eine *Inverse* besitzt.

Jordansche Normalform

Zu jeder (n,n)-Matrix A gibt eine eine reguläre Matrix X, so dass $J := X^{-1}AX$ eine Blockdiagonalmatrix $J = \operatorname{diag}\{J_1, \dots, J_m\}$ ist und die Diagonalblöcke J_k die Gestalt

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

besitzen. J heißt die Jordansche Normalform von A.

Kern einer Matrix

Es sei A eine (m,n)-Matrix. Dann heißt die Menge $\{x : Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n$ der Kern oder *Nullraum* von A.

Kofaktor

Es sei A eine (n,n)-Matrix, es seien $i, j \in \{1, \dots, n\}$, und es sei A_{ij} die $(n-1, n-1)$-Matrix, die man aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhält. Dann heißt die Zahl $(-1)^{i+j}\det A_{ij}$ der Kofaktor oder das *algebraische Komplement* von a_{ij}.

Kondition

Es sei A eine reguläre (n,n)-Matrix und $\|\cdot\|$ eine Matrixnorm. Dann heißt $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ die Kondition von A.
In Verallgemeinerung hiervon heißt für eine (m,n)-Matrix $\kappa(A) := \sigma_1/\sigma_r$ die Kondition von A, wobei σ_1 den maximalen und κ_r den minimalen *singulären Wert* von A bezeichnet.

kongruente Matrizen

Zwei Hermitesche Matrizen A und B heißen kongruent, wenn es eine reguläre Matrix X gibt mit $A = X^*BX$.

konsistent

Ein lineares Gleichungssystem heißt konsistent, wenn es lösbar ist.

Kronecker Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

heißt Kronecker Symbol.

Laplacescher Entwicklungssatz

Ist A eine (n,n)-Matrix, so gilt für alle $i,k \in \{1,\ldots,n\}$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk}.$$

Die erste Formel heißt Entwicklung von $\det(A)$ nach der i-ten Zeile, die zweite Entwicklung nach der k-ten Spalte.

linear abhängig

Die Vektoren $v^1,\ldots,v^m$ heißen linear abhängig, wenn das lineare Gleichungssystem $\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_m v^m = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt, d.h. eine Lösung $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, für die wenigstens ein α_j von Null verschieden ist.

lineare Abbildung

Sind V und W Vektorräume, so heißt die Abbildung T von V nach W linear, falls

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ für alle $u, v \in V$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$ für alle $u \in V$ und alle Skalare α

lineare Mannigfaltigkeit

Es sei V ein Vektorraum, W ein Teilraum von V und w_0 ein festes Element in V. Dann heißt die Menge $w_0 + W := \{w_0 + w \,:\, w \in W\}$ lineare Mannigfaltigkeit oder *affiner Raum* in V.

Linearkombination

Ein Vektor v ist Linearkombination der Vektoren $v^1,\ldots,v^m$, wenn es Skalare $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ gibt mit $v = \alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_m v^m$.

lineares Ausgleichsproblem

Unter dem linearen Ausgleichsproblem versteht man die Aufgabe, bei gegebener (m,n)-Matrix A und gegebenem Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ so zu bestimmen, dass die Euklidische Länge des *Defektes* $\|Ax - b\|$ minimal wird.

linear unabhängig

Die Vektoren $v^1,\ldots,v^m$ heißen linear unabhängig, wenn das lineare Gleichungssystem $\alpha_1 v^1 + \ldots + \alpha_m v^m = 0$ nur die triviale Lösung besitzt, d.h. aus dieser Gleichung folgt, dass alle α_j gleich Null sind.

Lösungsraum

Ist A eine (m,n)-Matrix, so ist die Menge aller Lösungen des *homogenen* linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ eine Teilraum des $\mathbb{R}^n$ und heißt der Lösungsraum dieses Systems.

LR-Zerlegung

Ist A eine reguläre (n,n)-Matrix, so gibt es eine *Permutationsmatrix* P, eine *untere Dreiecksmatrix* L und eine obere Dreiecksmatrix R mit $PA = LR$. Gibts es eine solche Zerlegung von A mit $P = E$, so heißt diese Zerlegung LR-Zerlegung von A.

Matrix

Eine (m,n)-Matrix A ist ein rechteckiges Schema reeller (oder komplexer) Zahlen mit m Zeilen und n Spalten.

Matrixnorm

Es sei A eine (m,n)-Matrix, $\|\cdot\|_m$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|_n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $\|A\|_{m,n} := \max\{\|Ax\|_m \,:\, \|x\|_n = 1\}$ die Matrixnorm, die den Normen $\|\cdot\|_m$ und $\|\cdot\|_n$ zugeordnet ist.

Maximumnorm

$\|x\|_\infty := \max\{|x_j| \,:\, j = 1,\ldots,n\}$ heißt Maximumnorm auf $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$.

Minor

Es sei A eine (n,n)-Matrix, es seien $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, und es sei A_{ij} die $(n-1,n-1)$-Matrix, die man aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte erhält. Dann heißt die Zahl $\det A_{ij}$ der Minor zu a_{ij}.

Moore-Penrose Inverse

Es sei A eine (m,n)-Matrix. Eine (n,m)-Matrix B heißt Moore-Penrose Inverse oder *Pseudoinverse* von A, wenn gilt

$$AB = (AB)^T,\ BA = (BA)^T,\ ABA = A,\ BAB = B.$$

negativ definit

Eine symmetrische (n,n)-Matrix A heißt negativ definit, wenn $x^T Ax < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, gilt. Äquivalent damit ist, dass alle Eigenwerte von A negativ sind.

negativ semidefinit

Eine symmetrische (n,n)-Matrix A heißt negativ semidefinit, wenn $x^T Ax \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Äquivalent damit ist, dass alle Eigenwerte von A nicht positiv sind.

nichtsinguläre Matrix

Eine (n,n)-Matrix heißt nichtsingulär oder *regulär*, wenn sie den *Rang* n besitzt.

normale Matrix

Die (n,n)-Matrix A heißt normal, falls $AA^T = A^T A$.

normierter Vektorraum

Ein Vektorraum V heißt normiert (kurz: normierter Raum), wenn es eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to V$ gibt mit

1. Aus $\|x\| = 0$ folgt $x = 0$ (Definitheit)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ für alle $x \in V$ und alle Skalare λ (Homogenität)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$

$\|\cdot\|$ heißt Norm auf V.

Nullraum einer Matrix

Ist A eine (m,n)-Matrix, so heißt der *Lösungsraum* des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ der Nullraum oder der *Kern* von A.

obere Dreiecksmatrix

Eine (m,n)-Matrix A heißt obere Dreiecksmatrix, wenn alle Elemente unterhalb der Diagonalen verschwinden, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $j < i$.

orthogonale Menge von Vektoren

Eine Menge von Vektoren $v^1, \ldots, v^m$ in einem Euklidischen Vektorraum V heißt orthogonal, wenn $\langle v^j, v^k \rangle = 0$ for $j \neq k$ gilt.

orthogonale Matrix

Eine Matrix A heißt orthogonal, wenn $AA^T = E$ gilt, wenn A also invertierbar ist und die Inverse von A mit der transponierten Matrix A^T übereinstimmt.

Orthogonalraum

Es sei V ein Euklidischer Vektorraum und $W \subset V$. Dann ist $\{v \in V : \langle v, w \rangle = 0$ für alle $w \in W\}$ der Orthogonalraum von W in V. Der Orthogonalraum von W wird mit $W^\perp$ bezeichnet.

Orthonormalbasis

Es sei V ein Euklidischer Vektorraum. Eine Menge $M \subset V$ heißt Orthonormalbasis von V, wenn

1. M ein *orthonormale Menge* ist
2. M eine *Basis* von V ist.

orthonormale Menge von Vektoren

Eine Menge von Vektoren heißt orthonormal, wenn sie *orthogonal* ist und alle Elemente die Länge 1 besitzen.

orthogonale Projektion

Sei V ein Euklidischer Vektorraum und W ein endlich dimensionaler Teilraum von V. Es sei $v \in V$ und $v = w+u$ die eindeutige Zerlegung von v nach dem *Projektionssatz* mit $w \in W$ und $u \perp W$. Dann heißt w die orthogonale Projektion von v. Die Abbildung $P : V \to V$, die jedem Vektor $v \in V$ seine orthogonale Projektion zuordnet, heißt orthogonale Projektion von V auf W.

Permutationsmatrix

Eine (n,n)-Matrix P heißt Permuatationsmatrix, wenn sie in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine 1 und sonst nur Nullen enthält.

positiv definit

Eine symmetrische (n,n)-Matrix A heißt positiv definit, wenn $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, gilt. Äquivalent damit ist, dass alle Eigenwerte von A positiv sind.

positiv semidefinit

Eine symmetrische (n,n)-Matrix A heißt positiv semidefinit, wenn $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt. Äquivalent damit ist, dass alle Eigenwerte von A nicht negativ sind.

Projektionssatz

Es sei V ein Euklidischer Vektorraum (nicht notwendig endlicher Dimension) und W ein endlich dimensionaler Teilraum von V. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ eine eindeutige Zerlegung $v = w + u$ mit $w \in W$ und $u \perp W$.

Pseudoinverse

Es sei A eine (m,n)-Matrix. Eine (n,m)-Matrix B heißt Pseudoinverse von A oder *Moore-Penrose Inverse*, wenn gilt

$$AB = (AB)^T, \; BA = (BA)^T, \; ABA = A, \; BAB = B.$$

quadratische Matrix

Eine (m,n)-Matrix heißt quadratisch, wenn $m = n$ gilt, wenn also die Zeilenzahl und die Spaltenzahl übereinstimmen.

QR-Zerlegung

Es sei A eine (m,n)-Matrix, Q eine orthogonale (m,m)-Matrix und R eine obere (m,n)-Dreiecksmatrix mit $A = QR$. Dann heißt dies eine QR-Zerlegung von A.

Rang einer Matrix

Ist A eine (m,n)-Matrix, so ist die maximale Anzahl *linear unabhängiger* Zeilen gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Spalten. Diese Maximalzahl heißt der Rang von A.

Rayleigh Quotient

Es sei A eine Hermitesche Matrix und $x \in \mathbb{C}^n$. Dann heißt $R_A(x) := x^*Ax/x^*x$ der Rayleigh Quotient von A an der Stelle x.

Rayleighsches Prinzip

Es sei A eine Hermitesche Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$ und zugehörigen Eigenvektoren $u^1, \ldots, u^n$. Dann gilt das Rayleighsche Prinzip

$$\lambda_j = \min\{R_A(x) : x^*u^k = 0,\ k = 1, \ldots, j-1\},$$

wobei $R_A(x)$ den *Rayleighschen Quotienten* von A an der Stelle x bezeichnet.

reguläre Matrix

Eine (n,n)-Matrix A heißt regulär, wenn ihr Rang n ist.

Residuum

Es seien die (m,n)-Matrix A und der Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Dann heißt der Vektor $d := Ax - b \in \mathbb{R}^m$ das Residuum oder der *Defekt* des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$.

Schur Norm

Es sei A eine (n,m)-Matrix. Dann heißt $\|A\| := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2}$ die Schur Norm oder *Frobenius Norm* oder *Erhard Schmidt Norm* von A.

Signatur einer Matrix

Die Hermitesche Matrix A besitze p positive und q negative Eigenwerte und den r-fachen Eigenwert 0. Dann heißt das Tripel (p,q,r) die Signatur von A.

singuläre Matrix

Die (n,n)-Matrix A heißt singulär, wenn ihr *Rang* kleiner als n ist.

singuläre Werte einer Matrix

Es sei A eine (m,n)-Matrix, und es seien $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_r$ die von 0 verschiedenen Eigenwerte von A^TA. Dann heißen $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, r$, die singulären Werte von A.

Singulärwertzerlegung

Es sei A eine (m,n)-Matrix. Dann gibt es eine orthogonale (m,m)-Matrix U, eine orthogonale (n,n)-Matrix V und eine (m,n)-Diagonalmatrix Σ mit $A = U\Sigma V^T$, wobei die Diagonalelemente von Σ nicht negativ und der Größe nach geordnet sind. Diese Zerlegung heißt Singulärwertzerlegung von A.

Skalar

Unter Skalaren verstehen wir im Zusammenhang mit reellen Vektorräumen die reellen Zahlen, im Zusammenhang mit komplexen Vektorräumen die komplexen Zahlen.

Skalarprodukt

Es sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine Abbildung $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt oder *inneres Produkt* in V, wenn gilt

1. $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ für alle $u,v,w \in V$ (Additivität)
2. $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \cdot \langle u,v\rangle$ für alle $u,v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (Homogenität)
3. $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$ für alle $u,v \in V$ (Symmetrie)
4. $\langle v,v\rangle > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$ (Definitheit)

Spaltenraum

Der Spaltenraum einer (m,n)-Matrix A ist der Teilraum des $\mathbb{R}^n$, der von den Spaltenvektoren von A aufgespannt wird.

Spaltensummennorm

Die Spaltensummennorm $\|A\|_1 := \max\{\sum_{i=1}^n |a_{ij}| : j = 1, \ldots, n\}$ ist der Summennorm zugeordnet.

Spektralradius

Es sei A eine (n,n)-Matrix. Dann heißt

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

der Spektralradius von A.

Spektralnorm

Es sei A eine (n,n)-Matrix. Dann ist die Spektralnorm $\sigma(A) := \sqrt{\rho(A^TA)}$ die der Euklidischen Norm *zugeordnete Matrixnorm*. Dabei bezeichnet $\rho(A^TA)$ den *Spektralradius* von A^TA.

Spektralsatz

Es sei A eine *normale* Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, und es sei $u^1, \ldots, u^n$ ein Orthonormalsystem von zugehörigen Eigenvektoren. Dann gilt

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u^j (u^j)^*.$$

Spektrum

Es sei A eine (n,n)-Matrix. Dann heißt die Menge aller Eigenwerte von A das Spektrum von A.

spezielle Eigenwertaufgabe

Es sei A eine (n,n)-Matrix. Dann versteht man unter der zugehörigen speziellen Eigenwertaufgabe das Problem: Bestimme $\lambda \in \mathbb{C}$ derart, dass das lineare System $(A - \lambda E)x = 0$ eine nichttriviale Lösung besitzt.

Spur einer Matrix

Es sei A eine (n,n)-Matrix. Dann heißt $\mathrm{Spur}\,(A) := \sum_{j=1}^{n} a_{jj}$ die Spur von A.

Störungslemma

Es sei A eine (n,n)-Matrix, und es gelte für eine Matrixnorm $\|A\| < 1$. Dann ist die Matrix $E - A$ regulär, und es gilt $\|(E-A)^{-1}\| \le 1/(1 - \|A\|)$.

Summe von Teilräumen

Es seien U und W Teilräume des Vektorraumes V. Dann ist $U + W := \{u + w \,:\, u \in U, w \in W\}$ ein Teilraum von V, die Summe von U und W.

Summennorm

$\|x\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|$ heißt die Summennorm des Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. $x \in \mathbb{C}^n$.

SVD

SVD (=singular value decomposition) ist die Abkürzung von Singulärwertzerlegung.

symmetrische Matrix

Die quadratische Matrix A heißt symmetrisch, wenn sie mit ihrer *transponierten* übereinstimmt.

Teilraum

Eine nichtleere Teilmenge W eines Vektorraumes V ist ein Teilraum von V, wenn

1. $v + w \in W$, falls $v \in W$ und $w \in W$
2. $\alpha v \in W$ für alle $v \in W$ und alle Skalare α

Trägheitsindex einer Matrix

Die Hermitesche Matrix A besitze die *Signatur* (p,q,r). Dann heißt die ganze Zahl p-q der Trägheitsindex von A.

Trägheitssatz von Sylvester

Sind A und B *kongruente Hermitesche* Matrizen, so besitzen A und B dieselbe *Signatur*.

transponierte Matrix

Ist $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$ eine (m,n)-Matrix, so heißt die (n,m)-Matrix B mit den Elementen $b_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, die transponierte Matrix von A und wird mit $A^T := B$ bezeichnet.

tridiagonale Matrix

Die (n,n)-Matrix A heißt tridiagonal, falls $a_{ij} = 0$ für $|i - j| > 1$.

unitäre Matrix

Die komplexe (n,n)-Matrix U heißt unitär, wenn $U^*U = E$ gilt.

untere Dreiecksmatrix

Eine (m,n)-Matrix A heißt untere Dreiecksmatrix, wenn alle Elemente oberhalb der Diagonalen verschwinden, d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$.

vertauschbare Matrizen

Die (n,n)-Matrizen A und B heißen vertauschbar, wenn $AB = BA$ gilt.

Vielfachheit eines Eigenwerts

Dies ist ein gemeinsamer Oberbegriff von *algebraische Vielfachheit* und *geometrische Vielfachheit*.

Zeilenraum

Der Zeilenraum einer (m,n)-Matrix A ist der Teilraum des $\mathbb{R}^n$, der von den Zeilenvektoren von A aufgespannt wird.

Zeilensummennorm

Die Zeilensummennorm $\|A\|_1 := \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \,:\, i = 1, \ldots, n\}$ ist der Summennorm zugeordnet.

zugeordnete Matrixnorm

Es sei A eine (m,n)-Matrix, $\|\cdot\|_m$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$ und $\|\cdot\|_n$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt $\|A\|_{m,n} := \max\{\|Ax\|_m \,:\, \|x\|_n = 1\}$ die Matrixnorm, die den Normen $\|\cdot\|_m$ und $\|\cdot\|_n$ zugeordnet ist.