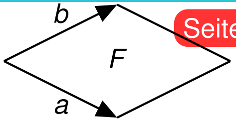
Vorlesung 12
25. bzw. 26. Januar 2012

Determinanten 1

Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$

$$V = < a, b \times c >$$

Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

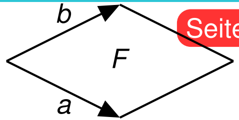
$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 > = 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 = < b, a^2 \times a^3 >$$

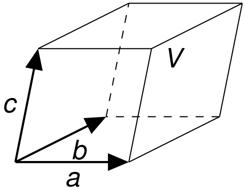
$$det(a^1, a^2, a^3) x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$



$$V = < a, b \times c >$$

Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

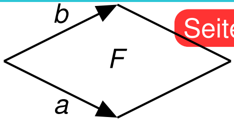
$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 >= 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 =< b, a^2 \times a^3 >$$

$$det(a^1, a^2, a^3) x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

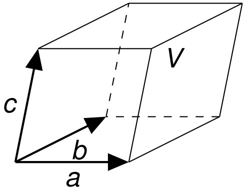
Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$

$$V = < a, b \times c >$$



Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

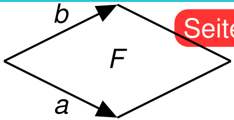
$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 >= 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 =< b, a^2 \times a^3 >$$

$$det(a^1, a^2, a^3) x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

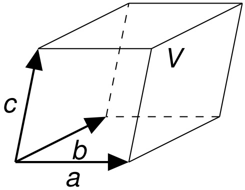
Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$

$$V = < a, b \times c >$$



Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

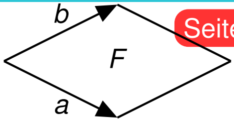
$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 >= 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 = < b, a^2 \times a^3 >$$

$$det(a^1, a^2, a^3) x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

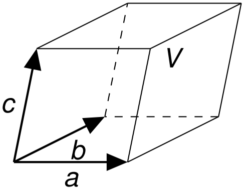
Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$

$$V = < a, b \times c >$$



Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

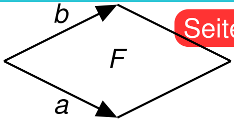
$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 > = 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 = < b, a^2 \times a^3 >$$

$$det(a^1, a^2, a^3) x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

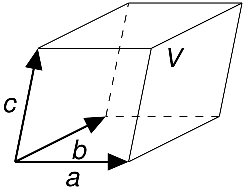
Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$

$$V =< a, b \times c >$$



Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

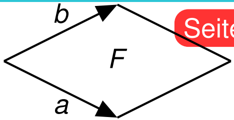
$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 >= 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 =< b, a^2 \times a^3 >$$

$$det(a^1, a^2, a^3) x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

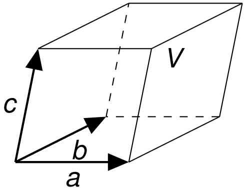
Seite 170

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = F$$



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = V$$

$$V = < a, b \times c >$$



Lineares Gleichungssystem

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b = 0$$

$$< a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 - b, a^2 \times a^3 >= 0$$

$$< a^1, a^2 \times a^3 > x_1 = < b, a^2 \times a^3 >$$

$$det(a^1, a^2, a^3) x_1 = det < b, a^2, a^3 >$$

Cramersche Regel

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 = b$$

mit

$$det(a^1, a^2, a^3) \neq 0 \iff a^1, a^2, a^3 \text{ l. u.}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{det \quad (b, a^2, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_2 = \frac{det \quad (a^1, b, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_3 = \frac{det \quad (a^1, a^2, b)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

Wenn Determinante verallgemeinert $\Rightarrow$ Cramersche Regel verallgemeinert.

Seite 171

Cramersche Regel

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 = b$$

mit

$$det(a^1, a^2, a^3) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; a^1, a^2, a^3 \text{ l. u.}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{det \quad (b, a^2, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_2 = \frac{det \quad (a^1, b, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_3 = \frac{det \quad (a^1, a^2, b)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

Wenn Determinante verallgemeinert $\Rightarrow$ Cramersche Regel verallgemeinert.

Cramersche Regel

$$a^1 x_1 + a^2 x_2 + a^3 x_3 = b$$

mit

$$det(a^1, a^2, a^3) \neq 0 \Leftrightarrow a^1, a^2, a^3 \text{ l. u.}$$

$$\Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{det \quad (b, a^2, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_2 = \frac{det \quad (a^1, b, a^3)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

$$x_3 = \frac{det \quad (a^1, a^2, b)}{det \quad (a^1, a^2, a^3)}$$

Wenn Determinante verallgemeinert $\Rightarrow$ Cramersche Regel verallgemeinert.

Aber!!!

Wende Cramer nur für kleine Dimension und bei dringender Notwendigkeit (Die gibt es so gut wie nie) an.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_i = x_i(a).$$

Aber!!!

Wende Cramer nur für kleine Dimension und bei dringender Notwendigkeit (Die gibt es so gut wie nie) an.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_i = x_i(a).$$

Überhaupt

Man schätze die Bedeutung der Determinanten in der linearen Algebra nicht zu hoch ein.

Sie sind nur später wichtiges Hilfsmittel in der Analysis.

Vereinbarung

Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $i, j \in \{1, \cdots, n\}$
Sei

$$A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1,n-1)}$$

die Matrix, die durch Streichen der $i - ten$ Zeile und $j - ten$ Spalte aus A entsteht.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right) \Rightarrow A_{23} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{array}\right)$$

Definition 5.2 (Rekursiv)

$$n = 1 : A = (a_{11}) \Rightarrow det\ A = a_{11}$$

$$n > 1 : \ det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, det\ A_{1j}$$

$det\ A :=$ Determinante

Vereinbarung

Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ und $i, j \in \{1, \cdots, n\}$
Sei
$$A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1,n-1)}$$
die Matrix, die durch Streichen der $i - ten$ Zeile und $j - ten$ Spalte aus A entsteht.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right) \Rightarrow A_{23} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{array}\right)$$

Definition 5.2 (Rekursiv)

$$n = 1 : A = (a_{11}) \Rightarrow det\ A = a_{11}$$

$$n > 1 : \ det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

$det\ A :=$ Determinante

Andere Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Andere Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Seite 172

$$n = 2 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} - a_{12} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$n = 3 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$+a_{11} \cdot \begin{array}{|c|cc|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} - a_{12} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} + a_{13} \begin{array}{|cc|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Seite 172

$$n = 2 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} - a_{12} \begin{array}{|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$n = 3 \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$+a_{11} \cdot \begin{array}{|c|cc|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} - a_{12} \begin{array}{|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} + a_{13} \begin{array}{|cc|c|} \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Für $n = 2, 3$ spezielle Merkregel (Sarrus)

Seite 172

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

blaue Produkte addieren, rote Produkte subtrahieren.

Achtung!

Für $n \geq 4$ FALSCH.

Aber wie komme ich an die Determinante für $n \geq 4$?

Effiziente Berechnung von Determinanten mit dem Gaussalgorithmus.

Dafür müssen wir aber noch einige Eigenschaften der Determinanten näher kennenlernen
(auch für später, in der Analysis, nützlich).

Seite 173

Satz 5.4

$n \geq 2$; $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$
$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ergibt sich aus A durch <u>Vertauschung zweier Zeilen</u>

$$\Rightarrow \ \det B = -\det A$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann $det\ B = -\ det\ A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann $\det B = -\det A$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann $det\ B = -\ det\ A$

Beweis zu Satz 1 ist etwas länglich. Deshalb:

Beweisskizze

- Beweis ist induktiv
- 2 Fälle unterscheiden

1. Vertausche benachbarte Zeilen
   a) Nicht die ersten beiden Zeilen tauschen
   b) Vertausche Zeile 1 mit Zeile 2
2. Vertausche beliebige Zeilen.

Beweis zu Satz 5.4

„*det*“ ist induktiv definiert. Beweis muss induktiv sein: Induktion über $n \geq 2$.

Induktionsverankerung: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$det\ A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21};\ det\ B = a_{21}\, a_{12} - a_{22}\, a_{11}$$

$$\Rightarrow det\ B = \ -det\ A \qquad (n = 2).$$

Sei Behauptung bewiesen für *det* von $(n-1, n-1)-$ Matrizen $(n \geq 3)$

Induktionsschluß: $n - 1 \longrightarrow n$

Wir betrachten nacheinander 2 Fälle
- Vertauschung benachbarter Zeilen $i \leftrightarrow i + 1$
- Vertauschung beliebiger Zeilen $i \leftrightarrow j$

Beweis zu Satz 5.4

„*det*" ist induktiv definiert. Beweis muss induktiv sein: Induktion über $n \geq 2$.

Induktionsverankerung: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$det\ A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}; \; det\ B = a_{21}\, a_{12} - a_{22}\, a_{11}$$

$$\Rightarrow det\ B = \; -det\ A \qquad (n = 2).$$

Sei Behauptung bewiesen für *det* von $(n-1, n-1)-$ Matrizen $(n \geq 3)$

Induktionsschluß: $n - 1 \longrightarrow n$

Wir betrachten nacheinander 2 Fälle
- Vertauschung benachbarter Zeilen $i \leftrightarrow i + 1$
- Vertauschung beliebiger Zeilen $i \leftrightarrow j$

Beweis zu Satz 5.4

„*det*“ ist induktiv definiert. Beweis muss induktiv sein: Induktion über $n \geq 2$.

Induktionsverankerung: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$det\ A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21};\ det\ B = a_{21}\, a_{12} - a_{22}\, a_{11}$$

$$\Rightarrow det\ B = \; -det\ A \qquad (n = 2).$$

Sei Behauptung bewiesen für *det* von $(n-1, n-1)$– Matrizen $(n \geq 3)$

Induktionsschluß: $n - 1 \longrightarrow n$

Wir betrachten nacheinander 2 Fälle
- Vertauschung benachbarter Zeilen $i \leftrightarrow i + 1$
- Vertauschung beliebiger Zeilen $i \leftrightarrow j$

Beweis zu Satz 5.4

„*det*" ist induktiv definiert. Beweis muss induktiv sein: Induktion über $n \geq 2$.

Induktionsverankerung: $n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

$$det\ A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21};\ det\ B = a_{21}\, a_{12} - a_{22}\, a_{11}$$

$$\Rightarrow det\ B = \ -det\ A \qquad (n = 2).$$

Sei Behauptung bewiesen für *det* von $(n-1, n-1)-$ Matrizen $(n \geq 3)$

Induktionsschluß: $n - 1 \longrightarrow n$

Wir betrachten nacheinander 2 Fälle
- Vertauschung benachbarter Zeilen $i \leftrightarrow i + 1$
- Vertauschung beliebiger Zeilen $i \leftrightarrow j$

Fall 1: Vertauschung benachbarter Zeilen $i \leftrightarrow i+1$

Definiton von „*det*“ hängt an der ersten Zeile

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

$\Rightarrow$ noch unterscheiden

$$i \geq 2 \text{ und } i = 1$$

zu $\underline{i \geq 2}$:
„Zeile 1“ von A = „Zeile 1“ von B
d.h. $a_{1j} = b_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$

Induktionsannahme sagt

$$det\ B_{1j} = -\ det\ A_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$$

$(n-1, n-1)-$ Matrix mit zwei vertauschten Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ det\ B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, b_{1j}\, det\ B_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}(-det\ A_{1j}) = -det\ A \end{aligned}$$

zu $\underline{i \geq 2}$:
„Zeile 1“ von A = „Zeile 1“ von B
d.h. $a_{1j} = b_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$

Induktionsannahme sagt

$$det\ B_{1j} = -\, det\ A_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$$

$(n-1, n-1)-$ Matrix mit zwei vertauschten Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ det\ B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, b_{1j}\, det\ B_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} (-det\ A_{1j}) = -det\ A \end{aligned}$$

zu $\underline{i \geq 2}$:
„Zeile 1“ von A = „Zeile 1“ von B
d.h. $a_{1j} = b_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$

Induktionsannahme sagt

$$det\ B_{1j} = -\ det\ A_{1j} \quad \forall_j = 1, 2, \cdots, n$$

$(n-1, n-1)-$ Matrix mit zwei vertauschten Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ det\ B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, b_{1j}\, det\ B_{1j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}(-det\ A_{1j}) = -det\ A \end{aligned}$$

zu <u>i = 1</u>: (etwas schwieriger)
Vertauschen der ersten und zweiten Zeile

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{1j} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow B_{1k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{1j} \triangleq$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j

$B_{1k} \triangleq$ Streiche in A Zeile 2 und Spalte $k \triangleq A_{2k}$

zu i = 1: (etwas schwieriger)
Vertauschen der ersten und zweiten Zeile

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{1j} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow B_{1k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$A_{1j} \hat{=}$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j

$B_{1k} \hat{=}$ Streiche in A Zeile 2 und Spalte $k \hat{=} A_{2k}$

zu i = 1: (etwas schwieriger)
Vertauschen der ersten und zweiten Zeile

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A_{1j} = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow B_{1k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,k-1} & a_{3,k+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{1j} \widehat{=} \text{ Streiche in } A \text{ Zeile 1 und Spalte } j$$

$$B_{1k} \widehat{=} \text{ Streiche in } A \text{ Zeile 2 und Spalte } k \widehat{=} A_{2k}$$

Nun zur „*det*“ -Berechnung

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

mit

$$det\ A_{1j} = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ A_{1j,2k} + \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{k}\, a_{2k}\ det\ A_{1j,2k}$$

$$det\ B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ B_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ A_{2k}$$

mit

$$det\ A_{2k} = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\ det\ A_{2k,1j} + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j}\, a_{1j}\ det\ A_{2k,1j}$$

$A_{1j,2k} \widehat{=}$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j und streiche Zeile 2 und Spalte $k \widehat{=} A_{2k,1j}$

$$\Rightarrow\ det\ A_{1j,2k} = det\ A_{2k,1j}$$

Nun zur „*det*“ -Berechnung

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\ a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

mit

$$det\ A_{1j} = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k}\ a_{2k}\ det\ A_{1j,2k} + \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{k}\ a_{2k}\ det\ A_{1j,2k}$$

$$det\ B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\ a_{2k}\ det\ B_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\ a_{2k}\ det\ A_{2k}$$

mit

$$det\ A_{2k} = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{1+j}\ a_{1j}\ det\ A_{2k,1j} + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j}\ a_{1j}\ det\ A_{2k,1j}$$

$A_{1j,2k} \hat{=}$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j und streiche Zeile 2 und Spalte $k \hat{=} A_{2k,1j}$

$$\Rightarrow\ det\ A_{1j,2k} = det\ A_{2k,1j}$$

Nun zur „*det*“ -Berechnung

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

mit

$$det\ A_{1j} = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ A_{1j,2k} + \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{k}\, a_{2k}\ det\ A_{1j,2k}$$

$$det\ B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ B_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ A_{2k}$$

mit

$$det\ A_{2k} = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\ det\ A_{2k,1j} + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j}\, a_{1j}\ det\ A_{2k,1j}$$

$A_{1j,2k} \hat{=}$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j und streiche Zeile 2 und Spalte $k \hat{=} A_{2k,1j}$

$$\Rightarrow\ det\ A_{1j,2k} = det\ A_{2k,1j}$$

Nun zur „*det*“ -Berechnung

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\ det\ A_{1j}$$

mit

$$det\ A_{1j} = \sum_{k=1}^{j-1} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ A_{1j,2k} + \sum_{k=j+1}^{n} (-1)^{k}\, a_{2k}\ det\ A_{1j,2k}$$

$$det\ B = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ B_{1k} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k}\, a_{2k}\ det\ A_{2k}$$

mit

$$det\ A_{2k} = \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\ det\ A_{2k,1j} + \sum_{j=k+1}^{n} (-1)^{j}\, a_{1j}\ det\ A_{2k,1j}$$

$A_{1j,2k} \hat{=}$ Streiche in A Zeile 1 und Spalte j und streiche Zeile 2 und Spalte $k \hat{=} A_{2k,1j}$

$$\Rightarrow\ det\ A_{1j,2k} = det\ A_{2k,1j}$$

det A besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{1+k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1\leq k<j\leq n$$

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1\leq j<k\leq n$$

det B besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1\leq j<k\leq n$$

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1\leq k<j\leq n$$

$$\Rightarrow det\,B=\,-\,det\,A$$

Zwischenbilanz: Bisher bewiesen Vertauschen benachbarter Zeilen ändert Vorzeichen der „*det*“.

det A besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{1+k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le k < j \le n$$

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le j < k \le n$$

det B besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le j < k \le n$$

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le k < j \le n$$

$$\Rightarrow det\,B = -\,det\,A$$

Zwischenbilanz: Bisher bewiesen Vertauschen benachbarter Zeilen ändert Vorzeichen der „*det*“.

det A besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{1+k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le k < j \le n$$

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le j < k \le n$$

det B besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le j < k \le n$$

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \le k < j \le n$$

$$\Rightarrow det\,B = -\,det\,A$$

Zwischenbilanz: Bisher bewiesen Vertauschen benachbarter Zeilen ändert Vorzeichen der „*det*“.

det A besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{1+k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \leq k < j \leq n$$

$$(-1)^{1+j}\,(-1)^{k}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \leq j < k \leq n$$

det B besteht aus den Summanden

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{1+j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \leq j < k \leq n$$

$$(-1)^{1+k}\,(-1)^{j}\,a_{1j}\,a_{2k}\,det\,A_{1j,2k};\,1 \leq k < j \leq n$$

$$\Rightarrow det\,B = \,-\,det\,A$$

Zwischenbilanz: Bisher bewiesen Vertauschen benachbarter Zeilen ändert Vorzeichen der „*det*“.

Fall 2: Vertauschung beliebiger Zahlen $i \leftrightarrow j$

$$A = \begin{pmatrix} 1-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ i-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ j-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ n-\text{te Zeile} \end{pmatrix} \quad (i < j)$$

$j - i - 1$ mal tausche $i - te$ Zeile mit unterem Nachbar
$\Rightarrow i - te$ Zeile steht an Position $j - 1$

1 weiterer Tausch
$\Rightarrow i - te$ Zeile steht an Position j
$j - te$ Zeile steht an Position $j - 1$
$j - i - 1$ mal tausche $j - te$ Zeile mit oberem Nachbar.

Fall 2: Vertauschung beliebiger Zahlen $i \leftrightarrow j$

$$A = \begin{pmatrix} 1-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ i-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ j-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ n-\text{te Zeile} \end{pmatrix} \quad (i < j)$$

$j - i - 1$ mal tausche $i - te$ Zeile mit unterem Nachbar
$\Rightarrow i - te$ Zeile steht an Position $j - 1$

1 weiterer Tausch
$\Rightarrow i - te$ Zeile steht an Position j
$j - te$ Zeile steht an Position $j - 1$
$j - i - 1$ mal tausche $j - te$ Zeile mit oberem Nachbar.

Fall 2: Vertauschung beliebiger Zahlen $i \leftrightarrow j$

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \text{te Zeile} \\ \vdots \\ i - \text{te Zeile} \\ \vdots \\ j - \text{te Zeile} \\ \vdots \\ n - \text{te Zeile} \end{pmatrix} \quad (i < j)$$

$j - i - 1$ mal tausche $i - te$ Zeile mit unterem Nachbar
$\Rightarrow i - te$ Zeile steht an Position $j - 1$

1 weiterer Tausch
$\Rightarrow i - te$ Zeile steht an Position j
$j - te$ Zeile steht an Position $j - 1$
$j - i - 1$ mal tausche $j - te$ Zeile mit oberem Nachbar.

Fall 2: Vertauschung beliebiger Zahlen $i \leftrightarrow j$

$$A = \begin{pmatrix} 1-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ i-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ j-\text{te Zeile} \\ \vdots \\ n-\text{te Zeile} \end{pmatrix} \quad (i<j)$$

$j-i-1$ mal tausche $i-te$ Zeile mit unterem Nachbar
$\Rightarrow i-te$ Zeile steht an Position $j-1$

1 weiterer Tausch
$\Rightarrow i-te$ Zeile steht an Position j
$j-te$ Zeile steht an Position $j-1$
$j-i-1$ mal tausche $j-te$ Zeile mit oberem Nachbar.

Insgesamt
mit $(j-i-1)+1+(j-i-1)=2\cdot(j-i-1)+1$ Vertauschungen

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det B &= (-1)^{2\cdot(j-i-1)+1}\det A\\ &= -\det A \quad \square\end{aligned}$$

Zusammenfassend

Vertauschen zweier beliebiger Zeilen ändert das Vorzeichen der „*det*“.

Insgesamt
mit $(j-i-1)+1+(j-i-1)=2\cdot(j-i-1)+1$ Vertauschungen

$$\begin{aligned}\Rightarrow \det B &= (-1)^{2\cdot(j-i-1)+1} \det A \\ &= -\det A \quad \square\end{aligned}$$

Zusammenfassend

Vertauschen zweier beliebiger Zeilen ändert das Vorzeichen der „*det*“.

Insgesamt
mit $(j-i-1)+1+(j-i-1) = 2\cdot(j-i-1)+1$ Vertauschungen

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\, B &= (-1)^{2\cdot(j-i-1)+1}\, det\, A \\ &= -\,det\, A \quad \square \end{aligned}$$

Zusammenfassend

Vertauschen zweier beliebiger Zeilen ändert das Vorzeichen der „*det*“.

Satz 5.5 von Laplace

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

$$\forall\, i \in \{1, \cdots, n\} : \ det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, det\, A_{ij}$$

Seite 174

Definition 5.6 „Entwicklung von *det A* nach i – *ter* Zeile „

$det\ A_{ij}$ „Minor zu a_{ij}“

$(-1)^{i+j}\ det\ A_{ij}$ „Kofaktor zu a_{ij}“
oder „algebraisches Komplement“
oder „Adjunkte“

$$A_{ij} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_{11} & \cdots & & a_{1j} & & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & & a_{ij} & & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nj} & & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \leftarrow i - te \text{ Zeile in } A$$

$\uparrow j - te$ Spalte in A.

Definition 5.6 „Entwicklung von *det A* nach $i -$ *ter* Zeile „

$\det A_{ij}$	„Minor zu a_{ij}“
$(-1)^{i+j} \det A_{ij}$	„Kofaktor zu a_{ij}“ oder „algebraisches Komplement“ oder „Adjunkte“

$$A_{ij} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) \leftarrow i - te \text{ Zeile in } A$$

$$\uparrow j - te \text{ Spalte in } A.$$

Beweis zu Satz 5.5

Durch mehrfaches Anwenden von Satz 5.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ vertauschen}$$

Nach $i-1$ Vertauschungen der $i-ten$ Zeile mit der jeweils darüberliegenden Zeile

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beweis zu Satz 5.5

Durch mehrfaches Anwenden von Satz 5.4

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ vertauschen}$$

Nach $i-1$ Vertauschungen der $i-ten$ Zeile mit der jeweils darüberliegenden Zeile

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Satz 1} \;\Rightarrow\; \det B = (-1)^{i-1} \det A$$

oder

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^{i-1} \cdot \det B \\
&= (-1)^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, b_{1j} \det B_{1j} \\
&= (-1)^{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{ij} \det A_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij} \quad \square
\end{aligned}$$

Was soll das nun?

Definition von $det\ A \hat{=}$ „Entwicklung nach $1-ter$ Zeile"

Entwicklungssatz von Laplace (Satz 2) $\hat{=}$ „Es ist egal, nach welcher Zeile man $det\ A$ entwickelt."

„Egal" bedeutet für uns dann natürlich, eine möglichst „einfache" Zeile zu wählen.

„Einfach" $\hat{=}$ viele 0-en in der Zeile

Gilt für Rechnungen zu Fuß

<u>Computer</u>: Gauss-Algorithmus.

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Entwickel nach letzter Zeile

$$\begin{aligned} \det A &= 0 \cdot \det A_{41} + 0 \cdot \det A_{42} + 0 \cdot \det A_{43} + 11 \cdot \det A_{44} \\ &= 11 \cdot \det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \text{ die ist „einfach“} \\ &= 11 \cdot \left[0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right] \\ &= 11 \cdot 9 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 5) = 99 \cdot (-4) = -396 \end{aligned}$$

Entwickeln nach 1. $-$ *ter* Zeile = viel mehr Arbeit = mehr Möglichkeiten, sich zu verrechnen.

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Entwickel nach letzter Zeile

$$\begin{aligned} det\ A &= 0 \cdot det\ A_{41} + 0 \cdot det\ A_{42} + 0 \cdot det\ A_{43} + 11 \cdot det\ A_{44} \\ &= 11 \cdot det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \text{ die ist „einfach"} \\ &= 11 \cdot \left[0 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 9 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right] \\ &= 11 \cdot 9 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 5) = 99 \cdot (-4) = -396 \end{aligned}$$

Entwickeln nach 1. $-$ *ter* Zeile = viel mehr Arbeit = mehr Möglichkeiten, sich zu verrechnen.

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Entwickel nach letzter Zeile

$$\begin{aligned} det\ A &= 0 \cdot det\ A_{41} + 0 \cdot det\ A_{42} + 0 \cdot det\ A_{43} + 11 \cdot det\ A_{44} \\ &= 11 \cdot det \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 9 \end{array}\right) \text{ die ist „einfach“} \\ &= 11 \cdot \left[0 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} + 0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + 9 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \right] \\ &= 11 \cdot 9 \cdot (1 \cdot 6 - 2 \cdot 5) = 99 \cdot (-4) = -396 \end{aligned}$$

Entwickeln nach 1. $-$ *ter* Zeile = viel mehr Arbeit = mehr Möglichkeiten, sich zu verrechnen.

Seite 176

Leichte Folgerung aus Satz 5.4 und Satz 5.5

Satz 5.9

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ besitzt zwei identische Zeilen

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

Beweis

$$\text{a) Zeile } i = \text{ Zeile } j \quad (i \neq j)$$

Vertausche $i-te$ Zeile mit $j-ter$ Zeile; nenne die neue Matrix B.

$$\text{Satz 1} \quad \Rightarrow \quad det\ B = -det\ A$$

$$\text{aus a)} \quad \Rightarrow \quad B = A \Rightarrow det\ B = det\ A$$

Also

$$det\ A = -det\ A$$

$$\Rightarrow det\ A = 0 \quad \square$$

Seite 176

Leichte Folgerung aus Satz 5.4 und Satz 5.5

Satz 5.9

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ besitzt zwei identische Zeilen

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

Beweis

$$\text{a) Zeile } i = \text{ Zeile } j \quad (i \neq j)$$

Vertausche $i - te$ Zeile mit $j - ter$ Zeile; nenne die neue Matrix B.

$$\begin{aligned} \text{Satz 1} \quad &\Rightarrow \quad det\ B = -det\ A \\ \text{aus a)} \quad &\Rightarrow \quad B = A \Rightarrow det\ B = det\ A \end{aligned}$$

Also

$$det\ A = -det\ A$$

$$\Rightarrow det\ A = 0 \quad \square$$

Seite 176

Leichte Folgerung aus Satz 5.4 und Satz 5.5

Satz 5.9

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ besitzt zwei identische Zeilen

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

Beweis

$$\text{a) Zeile } i = \text{ Zeile } j \quad (i \neq j)$$

Vertausche $i - te$ Zeile mit $j - ter$ Zeile; nenne die neue Matrix B.

$$\begin{array}{lll} \text{Satz 1} & \Rightarrow & det\ B = -det\ A \\ \text{aus a)} & \Rightarrow & B = A \Rightarrow det\ B = det\ A \end{array}$$

Also

$$det\ A = -det\ A$$

$$\Rightarrow det\ A = 0 \quad \square$$

Seite 175

Satz 5.8

(i) $det(\cdot)$ ist linear in jeder Zeile

$$det\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ \lambda a_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = \lambda\, det\begin{pmatrix} a_2^T \\ \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix},$$

$$det\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ b_i^T + c_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ b_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ c_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$$

(ii) $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann
$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n\, det(A)$

Beweis durch Entwickeln.

Satz 5.8

(i) $det(\cdot)$ ist linear in jeder Zeile

$$det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ \lambda a_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = \lambda \, det \begin{pmatrix} a_2^T \\ \vdots \\ a_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix},$$

$$det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ b_i^T + c_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ b_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ c_i^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix}$$

(ii) $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann
$det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \, det(A)$

Beweis durch Entwickeln.

Satz 5.10

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \lambda \in \mathbb{R}$;
$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ergebe sich aus A durch Addition von $\lambda\cdot$ Zeile k auf Zeile i (mit $i \neq k$)

$$\Rightarrow det\ B = det\ A$$

Beweis

$$A = (a_{ij})ij = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Rightarrow B = \left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1}+\lambda a_{k1} & \cdots & a_{ij}+\lambda a_{kj} & \cdots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

Nach dieser Zeile entwickeln!

Satz 5.10

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, \lambda \in \mathbb{R}$;
$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ergebe sich aus A durch Addition von $\lambda\cdot$ Zeile k auf Zeile i (mit $i \neq k$)

$$\Rightarrow det\ B = det\ A$$

Beweis

$$A = (a_{ij})ij = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} + \lambda a_{k1} & \cdots & a_{ij} + \lambda a_{kj} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \hline \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\swarrow$ Nach dieser Zeile entwickeln!

$$\Rightarrow det\ B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot (a_{ij} + \lambda a_{kj}) det\ A_{ij}$$
$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}}_{det\ A} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{kj} \cdot det\ A_{ij}}_{\lambda \cdot det\ C}$$

Worin

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow det\ C = 0$

$$\Rightarrow det\ B = det\ A \quad \square$$

$$\Rightarrow det\ B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot (a_{ij} + \lambda a_{kj}) det\ A_{ij}$$
$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}}_{det\ A} + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{kj} \cdot det\ A_{ij}}_{\lambda \cdot det\ C}$$

Worin

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Zwei gleiche Zeilen $\Rightarrow det\ C = 0$

$$\Rightarrow det\ B = det\ A \quad \square$$

Satz 5.10 erinnert schon an Gauss-Algorithmus für Determinantenberechnung:

- Eliminationsschritt ändert *det* nicht!
- Zeilenvertauschung (Pivotsuche) ändert Vorzeichen der *det*!

Gauss-Algorithmus
$\longrightarrow$ Dreiecksmatrix

det dafür einfach:

Satz 5.12

$$(a_{ij})ij = 1, \cdots, n = A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

untere oder obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow det\ A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Beweis

A obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Seite 177

Satz 5.12

$$(a_{ij})ij = 1, \cdots, n = A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

untere oder obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow det\ A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Beweis

A obere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ \hline 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\det A &= a_{nn} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1,n-1} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \\
&= a_{nn} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1,n-2} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & a_{n-2,n-2} \end{pmatrix} \\
&\;\vdots \\
&= a_{nn} \cdot a_{n-1,n-1} \cdot a_{n-2,n-2} \cdot \cdots \cdot a_{22} \cdot \det(a_{11}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}
\end{aligned}
$$

A untere Dreiecksmatrix

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jeweils nach oberster Zeile entwickeln

$$\Rightarrow \quad det\, A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \qquad \square$$

Einfaches Beispiel

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$\det E_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Einfaches Beispiel

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dann

$$det\ E_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Seite 177

Alles bereit für “*det*“-Berechnung mit Gauss-Algorithmus:

- Führe Eliminationsschritte durch
- Merke die Zeilenvertauschungen (bei Pivotsuche) in einem Zähler „i“.

Bricht Elimination vorzeitig ab (d.h. kein Pivotelement $\neq 0$ in Spalte; es entsteht eine Nullzeile).

$$\Rightarrow \det A = 0$$

Sonst (d.h. $A \longrightarrow R$)

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^i \cdot \det R \\ &= (-1)^i \cdot \prod_{j=1}^{n} r_{jj} \end{aligned}$$

$i \widehat{=}$ Anzahl Zeilenvertauschungen

Seite 177

Alles bereit für “*det*“-Berechnung mit Gauss-Algorithmus:

- Führe Eliminationsschritte durch
- Merke die Zeilenvertauschungen (bei Pivotsuche) in einem Zähler „i“.

Bricht Elimination vorzeitig ab (d.h. kein Pivotelement $\neq 0$ in Spalte; es entsteht eine Nullzeile).

$$\Rightarrow \det A = 0$$

Sonst (d.h. $A \longrightarrow R$)

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^i \cdot \det R \\ &= (-1)^i \cdot \prod_{j=1}^{n} r_{jj} \end{aligned}$$

$i \hat{=}$ Anzahl Zeilenvertauschungen

Alles bereit für “*det*“-Berechnung mit Gauss-Algorithmus:

- Führe Eliminationsschritte durch
- Merke die Zeilenvertauschungen (bei Pivotsuche) in einem Zähler „i“.

Bricht Elimination vorzeitig ab (d.h. kein Pivotelement $\neq 0$ in Spalte; es entsteht eine Nullzeile).

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

Sonst (d.h. $A \longrightarrow R$)

$$\begin{aligned} det\ A &= (-1)^i \cdot det\ R \\ &= (-1)^i \cdot \prod_{j=1}^{n} r_{jj} \end{aligned}$$

$i \hat{=}$ Anzahl Zeilenvertauschungen

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \quad \text{Zähler } i = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \quad \text{Zähler } i = 1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$det\ R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ A &= (-1)^{i=1} det\ R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{array} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \quad \text{Zähler } i = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \quad \text{Zähler } i = 1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$det\ R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ A &= (-1)^{i=1} det\ R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \qquad \text{Zähler } i = 0$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \qquad \text{Zähler } i = 1$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$det\ R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ A &= (-1)^{i=1} det\ R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \qquad \text{Zähler } i = 0$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \qquad \text{Zähler } i = 1$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$\det R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det A &= (-1)^{i=1} \det R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Beispiel

Berechne $det\ A$ von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \qquad \text{Zähler } i = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \qquad \text{Zähler } i = 1$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$det\ R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ A &= (-1)^{i=1} det\ R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{array} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \qquad \text{Zähler } i = 0$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \qquad \text{Zähler } i = 1$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$det\, R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\, A &= (-1)^{i=1} det\, R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Beispiel

Berechne *det A* von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{matrix} \quad \text{(Eliminationsschritt)} \quad \text{Zähler } i = 0$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \updownarrow \text{vertauschen} \quad \text{Zähler } i = 1$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = R$$

$$det\, R = 1 \cdot (-1) \cdot (-6) \cdot (-4) = -24$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\, A &= (-1)^{i=1} det\, R \\ &= -(-24) = 24 \end{aligned}$$

Jetzt kennengelernt „*det*“-Berechnung über
Gauss-Algorithmus
oder
Entwicklungs-Satz.

Wie denn nun?

Grob überschlagen, wieviel man jeweils rechnen muss:
Multiplikationen/Divisionen

Jetzt kennengelernt „*det*“-Berechnung über
Gauss-Algorithmus
oder
Entwicklungs-Satz.

Wie denn nun?

Grob überschlagen, wieviel man jeweils rechnen muss:
Multiplikationen/Divisionen

Rechenaufwand für Entwicklungssatz

Behauptung:

$$RA_E(n) \geq n! \text{ Für } n \geq 2$$

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n)$

Beweis: Induktion

$n = 2:$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \Rightarrow RA_E(2) = 2 \geq 2!$$

$n - 1 \to n:$

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \underbrace{det A_{ij}}_{RA_E(n-1) \geq (n-1)!} \Rightarrow RA_E(n) \geq n \cdot (n-1)! + n = n! + n \geq n!$$

Seite 178

Rechenaufwand für Entwicklungssatz

Behauptung:

$$RA_E(n) \geq n! \text{ Für } n \geq 2$$

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n)$

Beweis: Induktion

$n = 2:$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \Rightarrow RA_E(2) = 2 \geq 2!$$

$n - 1 \to n:$

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \underbrace{detA_{ij}}_{RA_E(n-1) \geq (n-1)!} \Rightarrow RA_E(n) \geq n \cdot (n-1)! + n = n! + n \geq n!$$

Seite 178

Rechenaufwand für Entwicklungssatz

Behauptung:

$$RA_E(n) \geq n! \text{ Für } n \geq 2$$

$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n)$

Beweis: Induktion

$n = 2:$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \Rightarrow RA_E(2) = 2 \geq 2!$$

$n - 1 \to n:$

$$det\, A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \underbrace{detA_{ij}}_{RA_E(n-1) \geq (n-1)!} \Rightarrow RA_E(n) \geq n \cdot (n-1)! + n = n! + n \geq n!$$

Rechenaufwand für Gauss-Algorithmus

Elimination unterhalb $i-ter$ Zeile:

Für jede Zeile darunter:

a) Berechne Eliminationsfaktor $\Rightarrow$ 1 Mult./Div.
b) Multipliziere damit die $i-te$ Zeile $\Rightarrow n-i$ Mult.
c) Eliminiere (keine Mult./Div.)
   zusammen: $n-i+1$ Mult./Div.

Rechenaufwand für Gauss-Algorithmus

Elimination unterhalb $i-ter$ Zeile:

Für jede Zeile darunter:

a) Berechne Eliminationsfaktor $\Rightarrow$ 1 Mult./Div.
b) Multipliziere damit die $i-te$ Zeile $\Rightarrow n-i$ Mult.
c) Eliminiere (keine Mult./Div.)
   zusammen: $n-i+1$ Mult./Div.

Aufwand für Elimination unterhalb $i - ter$ Zeile

$$(n-i)\cdot(n-i+1) = (n-i)^2 + (n-i) \text{ Multipikationen}$$

Gesamtaufwand für Eliminationsprozeß:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\{(n-i)^2+(n-i)\right\} \qquad \text{„rückwärts zählen“}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\{i^2+i\} \qquad \text{„vorwärts zählen „}$$

$$= \cdots = \frac{1}{3}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n+1) \approx \frac{n^3}{3} \text{ Multipikationen}$$

$$det\ R = \prod_{i=1}^{n} r_{ii} \Rightarrow n-1 \text{ Multipikationen}$$

Aufwand für Elimination unterhalb $i - ter$ Zeile

$$(n-i)\cdot(n-i+1) = (n-i)^2 + (n-i) \text{ Multipikationen}$$

Gesamtaufwand für Eliminationsprozeß:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left\{(n-i)^2+(n-i)\right\} \qquad \text{„rückwärts zählen“}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\{i^2+i\} \qquad \text{„vorwärts zählen „}$$

$$= \cdots = \frac{1}{3}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n+1) \approx \frac{n^3}{3} \text{ Multipikationen}$$

$$det\ R = \prod_{i=1}^{n} r_{ii} \Rightarrow n-1 \text{ Multipikationen}$$

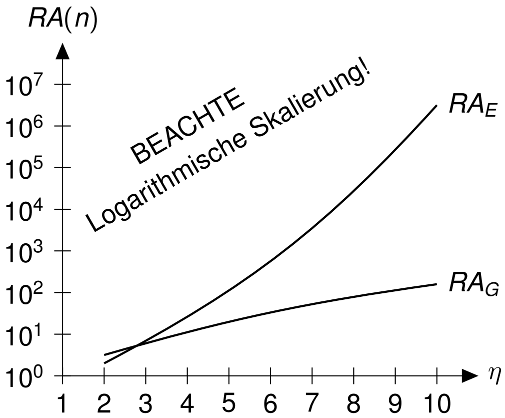
Also

Gauss-Algorithmus für *det*:

$$RA_G(n) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n+1) + (n-1)$$

Entwicklungssatz für *det*:

$$RA_E(n) \geq n!$$



$RA(n)$
10^7
10^6
10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
BEACHTE
Logarithmische Skalierung!
RA_E
RA_G
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
η

n	$RA_E(n)$	$RA_G(n)$
2	2	3
3	6	10
4	24	23
5	120	44
6	720	75
7	5040	118
8	40320	175
9	362880	248
10	3628800	339

Sätzchen

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ besitzt eine Nullzeile

$$\Rightarrow \det A = 0$$

Beweischen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{entwickeln (sei i-te Zeile)}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot 0 \cdot \det A_{ij} = 0 \qquad \square$$

Sätzchen

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ besitzt eine Nullzeile

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

Beweischen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{entwickeln (sei i-te Zeile)}$$

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot 0 \cdot det\ A_{ij} = 0 \quad \square$$

Nochmal Gauss-Algorithmus

A singuläre Matrix

$\Rightarrow$ Eliminationsprozeß produziert eine Nullzeile

$$\Rightarrow \det A = 0$$

A reguläre Matrix

$\Rightarrow$ Eliminationsprozeß bildet R mit $r_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$

$$\Rightarrow \det A \neq 0$$

$(\det A = (-1)^i \prod_{i=1}^{n} r_{ii} \neq 0)$

Nochmal Gauss-Algorithmus

A singuläre Matrix

$\Rightarrow$ Eliminationsprozeß produziert eine Nullzeile

$$\Rightarrow det\ A = 0$$

A reguläre Matrix

$\Rightarrow$ Eliminationsprozeß bildet R mit $r_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \cdots, n$

$$\Rightarrow det\ A \neq 0$$

$(det\ A = (-1)^i \prod_{i=1}^n r_{ii} \neq 0)$

Seite 178

Satz 5.14

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

$$A \text{ regulär } \Leftrightarrow det\, A \neq 0$$

Kleine Anwendung 5.16

$$a = (a_1, a_2, a_3)^T,\ b = (b_1, b_2, b_3)^T,\ c = (c_1, c_2, c_3)^T$$

Ortsvektoren von Punkten

$\rightarrow$ a, b, c nicht kollinear $\rightarrow$ a, b, c legen Ebene fest.

Ebenengleichung einfach:

$$det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Entwicklung nach 1. Zeile zeigt

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot |\cdot| + x_2 \cdot |\cdot| + x_3 \cdot |\cdot| + 1 \cdot |\cdot| = 0$$

ACHTUNG!

Wenn a, b, c auf einer Geraden liegen

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$$

Kleine Anwendung 5.16

$$a = (a_1, a_2, a_3)^T,\ b = (b_1, b_2, b_3)^T,\ c = (c_1, c_2, c_3)^T$$

Ortsvektoren von Punkten

$\rightarrow$ a, b, c nicht kollinear $\rightarrow$ a, b, c legen Ebene fest.

Ebenengleichung einfach:

$$det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Entwicklung nach 1. Zeile zeigt

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot |\cdot| + x_2 \cdot |\cdot| + x_3 \cdot |\cdot| + 1 \cdot |\cdot| = 0$$

ACHTUNG!

Wenn a, b, c auf einer Geraden liegen

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$$

Kleine Anwendung 5.16

Seite 179

$$a = (a_1, a_2, a_3)^T,\ b = (b_1, b_2, b_3)^T,\ c = (c_1, c_2, c_3)^T$$

Ortsvektoren von Punkten

$\rightarrow$ a, b, c nicht kollinear $\rightarrow$ a, b, c legen Ebene fest.

Ebenengleichung einfach:

$$det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Entwicklung nach 1. Zeile zeigt

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot |\cdot| + x_2 \cdot |\cdot| + x_3 \cdot |\cdot| + 1 \cdot |\cdot| = 0$$

ACHTUNG!

Wenn a, b, c auf einer Geraden liegen

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$$

Kleine Anwendung 5.16

$$a = (a_1, a_2, a_3)^T,\ b = (b_1, b_2, b_3)^T,\ c = (c_1, c_2, c_3)^T$$

Ortsvektoren von Punkten

$\rightarrow a, b, c$ nicht kollinear $\rightarrow a, b, c$ legen Ebene fest.

Ebenengleichung einfach:

$$det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Entwicklung nach 1. Zeile zeigt

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot |\cdot| + x_2 \cdot |\cdot| + x_3 \cdot |\cdot| + 1 \cdot |\cdot| = 0$$

ACHTUNG!

Wenn a, b, c auf einer Geraden liegen

$$det() = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot 0 + x_2 \cdot 0 + x_3 \cdot 0 = 0$$

Ende der Vorlesung 12

Vorlesung 13
01. bzw. 02. Februarr 2012

Determinanten 2

Seite 180

Satz 5.18

$A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det(A \cdot B) = det\,A \cdot det\,B$$

Beweis

Einige Vorüberlegungen

1.

$$det\left[\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{n+1,i} & & & \\ & & \vdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix} A\right] = det\,A$$

Seite 180

Satz 5.18

$A, B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det(A \cdot B) = det\, A \cdot det\, B$$

Beweis

Einige Vorüberlegungen

1.

$$det\left[\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{n+1,i} & & & \\ & & \vdots & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix} A\right] = det\, A$$

2. $A \rightarrow R = M_{n-1} \cdots M_1 \; P \; A$

$$det(A) = (-1)^v det\ R$$

$$det(A \cdot B) = (-1)^v det\ RB$$

3.

$$det\left(\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f_{n-2,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} B\right) = det\ B$$

weil
1. Zeile $= B^1 + \sum_{j=2}^{n} f_{1j}\, B^j$
2. Zeile $= B^2 + \sum_{j=0}^{n} f_{2j}\, B^j$

2. $A \to R = M_{n-1} \cdots M_1 \, P \, A$

$$det(A) = (-1)^v det\ R$$

$$det(A \cdot B) = (-1)^v det\ RB$$

3.

$$det\left(\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f_{n-2,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} B\right) = det\ B$$

weil
1. Zeile $= B^1 + \sum_{j=2}^{n} f_{1j}\, B^j$
2. Zeile $= B^2 + \sum_{j=0}^{n} f_{2j}\, B^j$

4.

$$det(diag(d_1, \cdots, d_n) \cdot B) = \prod_{i=1}^{n} d_i \; det\, B$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & B^1 \\ d_2 & B^2 \\ d_n & B^n \end{pmatrix}$$

Und damit ist der Beweis zack-zack erledigt:

$$det(AB) \stackrel{2}{=} (-1)^v det(RB) =$$

$$= (-1)^v det\left(diag(r_{11} \cdots r_{nn}) \begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f_{n-2,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} B \right)$$

$$\stackrel{4}{=} \underbrace{(-1)^v \prod_{i=1}^{n} r_{ii}}_{=(-1)^v det\, R} \underbrace{det\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & f_{n-2,n} \\ & & & 1 \end{pmatrix} B \right) \right)}_{\stackrel{3}{det}(B)} = det(A) det(B) \square$$

Leichte Folgerung

Seite 181

Korollar 5.19

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär

$$\Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$$

Beweis (einfach)

$$det\ E_n = det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= det\ E_n = det(A^{-1} \cdot A) \\ &= detA^{-1} \cdot det\ A \end{aligned}$$

$$A \text{ regulär } \Rightarrow det\ A \neq 0$$

Also

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \qquad \square$$

Beweis (einfach)

$$det\ E_n = det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= det\ E_n = det(A^{-1} \cdot A) \\ &= detA^{-1} \cdot det\ A \end{aligned}$$

$$A \text{ regulär } \Rightarrow det\ A \neq 0$$

Also

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \qquad \square$$

Beweis (einfach)

$$det\ E_n = det \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= det\ E_n = det(A^{-1} \cdot A) \\ &= detA^{-1} \cdot det\ A \end{aligned}$$

$$A \text{ regulär } \Rightarrow det\ A \neq 0$$

Also

$$det\ A^{-1} = \frac{1}{det\ A} \quad \Box$$

Beispiel

Seite 181

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad det\ A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad det\ B = -2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad det(A \cdot B) = -10 = 5 \cdot (-2) = det\ A \cdot det\ B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad detA^{-1} = (\frac{1}{5})^2 \cdot 5 = \frac{1}{5} = \frac{1}{det\ A}$$

Beispiel

Seite 181

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad det\ A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad det\ B = -2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad det(A \cdot B) = -10 = 5 \cdot (-2) = det\ A \cdot det\ B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad detA^{-1} = (\frac{1}{5})^2 \cdot 5 = \frac{1}{5} = \frac{1}{det\ A}$$

Beispiel

Seite 181

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad det\, A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad det\, B = -2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad det(A \cdot B) = -10 = 5 \cdot (-2) = det\, A \cdot det\, B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad detA^{-1} = (\frac{1}{5})^2 \cdot 5 = \frac{1}{5} = \frac{1}{det\, A}$$

Beispiel

Seite 181

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad det\, A = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad det\, B = -2$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad det(A \cdot B) = -10 = 5 \cdot (-2) = det\, A \cdot det\, B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad detA^{-1} = (\frac{1}{5})^2 \cdot 5 = \frac{1}{5} = \frac{1}{det\, A}$$

Noch ein Beispiel: Permutationsmatrizen

Seite 182

$P \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Permutationsmatrix

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} e_{i1}^T \\ e_{i2}^T \\ \vdots \\ e_{in}^T \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} (i_1, i_2, \cdots, i_n) \\ \text{Permutation von} \\ (1, 2, \cdots, n) \end{array} \right\}$$

P entsteht aus $E_n = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix}$

durch $k-$faches Vertauschen von Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ P &= (-1)^k \overbrace{det\ E_n}^{=1} \\ &= (-1)^k = \begin{cases} +1 \\ oder \\ -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Noch ein Beispiel: Permutationsmatrizen

$P \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Permutationsmatrix

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} e_{i1}^T \\ e_{i2}^T \\ \vdots \\ e_{in}^T \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{c} (i_1, i_2, \cdots, i_n) \\ \text{Permutation von} \\ (1, 2, \cdots, n) \end{array} \right\}$$

P entsteht aus $E_n = \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix}$

durch $k-$faches Vertauschen von Zeilen

$$\begin{aligned} \Rightarrow det\ P &= (-1)^k \overbrace{det\ E_n}^{=1} \\ &= (-1)^k = \left\{ \begin{array}{l} +1 \\ oder \\ -1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

P ist orthogonale Matrix: $P \cdot P^T = E_n$

$$\Rightarrow 1 = det\ E_n = det(P \cdot P^T) = det\ P \cdot det\ P^T$$

Also

$$1 = (-1)^k \cdot det\ P^T$$

$$\Rightarrow det\ P^T = (-1)^k = det\ P$$

Merken für später!!!

Seite 181

Bisher nur ZEILEN manipuliert und daraus Regeln für „*det*“ hergeleitet.

Alles bleibt auch gültig für SPALTEN-Manipulationen, denn

Satz 5.21

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det\, A = det\, A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$A^T = ((A^1)^T, \cdots, (A^n)^T) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

Seite 181

Bisher nur ZEILEN manipuliert und daraus Regeln für „*det*“ hergeleitet.

Alles bleibt auch gültig für SPALTEN-Manipulationen, denn

Satz 5.21

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det\ A = det\ A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$A^T = ((A^1)^T, \cdots, (A^n)^T) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

Seite 181

Bisher nur ZEILEN manipuliert und daraus Regeln für „*det*“ hergeleitet.

Alles bleibt auch gültig für SPALTEN-Manipulationen, denn

Satz 5.21

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det\ A = det\ A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$A^T = ((A^1)^T, \cdots, (A^n)^T) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

Seite 181

Bisher nur ZEILEN manipuliert und daraus Regeln für „*det*“ hergeleitet.

Alles bleibt auch gültig für SPALTEN-Manipulationen, denn

Satz 5.21

$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$

$$\Rightarrow det\ A = det\ A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}) \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$A^T = ((A^1)^T, \cdots, (A^n)^T) = \left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \\ \cdots \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

Beweis zu Satz 5.20

1. Fall:

A singulär $\Rightarrow A^T$ singulär

Dann

$$det\ A = 0 = det\ A^T$$

2. Fall:

A regulär $\Rightarrow \exists\ P \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Permutationsmatrix

$$P \cdot A = L \cdot R$$

L, R Dreiecksmatrizen

$$\Rightarrow det\ L = det\ L^T, \quad det\ R = det\ R^T$$

Beweis zu Satz 5.20

1. Fall:

A singulär $\Rightarrow A^T$ singulär

Dann

$$det\ A = 0 = det\ A^T$$

2. Fall:

A regulär $\Rightarrow \exists\ P\ \in\ \mathbb{R}^{(n,n)}$ Permutationsmatrix

$$P \cdot A = L \cdot R$$

L, R Dreiecksmatrizen

$$\Rightarrow det\ L = det\ L^T, \quad det\ R = det\ R^T$$

Jetzt rechnen

$$
\begin{aligned}
\det P \cdot \det A &= \det(P \cdot A) = \det(L \cdot R) \\
&= \det L \cdot \det R = \det L^T \cdot \det R^T \\
&= \det R^T \cdot \det L^T = \det(R^T L^T) \\
&= \det((L \cdot R)^T) = \det((P \cdot A)^T) \\
&= \det A^T \cdot \det P^T
\end{aligned}
$$

Wir haben

$$\det P \cdot \det A = \det A^T \cdot \det P^T$$

Wir wissen aber schon

$$\det P = \det P^T$$

$$\Rightarrow \det A = \det A^T \quad \square$$

Jetzt rechnen

$$\begin{aligned} det\ P \cdot det\ A &= det(P \cdot A) = det(L \cdot R) \\ &= det\ L \cdot det\ R = det\ L^T \cdot det\ R^T \\ &= det\ R^T \cdot det\ L^T = det(R^T\ L^T) \\ &= det((L \cdot R)^T) = det((P \cdot A)^T) \\ &= det\ A^T \cdot det\ P^T \end{aligned}$$

Wir haben

$$det\ P \cdot det\ A = det\ A^T \cdot det\ P^T$$

Wir wissen aber schon

$$det\ P = det\ P^T$$

$$\Rightarrow det\ A = det\ A^T \quad \square$$

Alle Aussagen über “*det*“, die sich auf ZEILEN beziehen, gelten auch für SPALTEN.

Und das bedeutet ...

Alle Aussagen über “*det*“, die sich auf ZEILEN beziehen, gelten auch für SPALTEN.

Und das bedeutet ...

$$A = (a_{ij})_{ij=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Vertauschungen

Vertauschen zweier $\left\{ \begin{matrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{matrix} \right\}$

Ändert das Vorzeichen von *det A*.

Entwicklungssatz von Laplace

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $j - ter$ Spalte.

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $i - ter$ Zeile.

$$A = (a_{ij})_{ij=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Vertauschungen

Vertauschen zweier $\left\{ \begin{matrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{matrix} \right\}$

Ändert das Vorzeichen von $det\ A$.

Entwicklungssatz von Laplace

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $j-ter$ Spalte.

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $i-ter$ Zeile.

$$A = (a_{ij})_{ij=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$$

Vertauschungen

Vertauschen zweier $\left\{ \begin{matrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{matrix} \right\}$

Ändert das Vorzeichen von *det A*.

Entwicklungssatz von Laplace

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $j - ter$ Spalte.

$$det\ A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\ A_{ij}$$

Entwicklung nach $i - ter$ Zeile.

Additionen

Addition des Vielfachen einer $\begin{Bmatrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{Bmatrix}$ zu einer Anderen $\begin{Bmatrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{Bmatrix}$ ändert die *det A* nicht.

Multiplikationen

Multiplizieren einer $\begin{Bmatrix} \text{SPALTEN} \\ \text{ZEILEN} \end{Bmatrix}$ mit dem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ liefert $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $\det B = \lambda \cdot \det A$

Additionen

Addition des Vielfachen einer $\left\{\begin{matrix}\text{SPALTEN}\\ \text{ZEILEN}\end{matrix}\right\}$ zu einer Anderen $\left\{\begin{matrix}\text{SPALTEN}\\ \text{ZEILEN}\end{matrix}\right\}$ ändert die *det A* nicht.

Multiplikationen

Multiplizieren einer $\left\{\begin{matrix}\text{SPALTEN}\\ \text{ZEILEN}\end{matrix}\right\}$ mit dem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ liefert $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ mit $\mathit{det}\, B = \lambda \cdot \mathit{det}\, A$

Bemerkung

Nimmt man noch folgende Eigenschaften dazu

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \underline{\tilde{a}}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix}$$

$$det(a_1, \cdots, a_i + b, \cdots, a_n) = det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + det(a_1, \cdots, b, \cdots, a_n)$$

$$det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_i^T + \underline{\tilde{b}}^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_i^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{b}}^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix}$$

so sieht man, dass $det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}$ multilineare Abbildung ist.

$$det\, E_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und der Vorzeichenwechsel bei Zeilentausch legen det als alternierende, normierte, multilineare Abbildung fest.

Bemerkung

Nimmt man noch folgende Eigenschaften dazu

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \underline{\tilde{a}}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix}$$

$$det(a_1, \cdots, a_i + b, \cdots, a_n) = det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + det(a_1, \cdots, b, \cdots, a_n)$$

$$det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_i^T + \underline{\tilde{b}}^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_i^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{b}}^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix}$$

so sieht man, dass $det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}$ multilineare Abbildung ist.

$$det\, E_n = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

und der Vorzeichenwechsel bei Zeilentausch legen det als alternierende, normierte, multilineare Abbildung fest.

Bemerkung

Nimmt man noch folgende Eigenschaften dazu

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \underline{\tilde{a}}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix}$$

$$det(a_1, \cdots, a_i + b, \cdots, a_n) = det(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n) + det(a_1, \cdots, b, \cdots, a_n)$$

$$det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_i^T + \underline{\tilde{b}}^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_i^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix} + det \begin{pmatrix} \underline{\tilde{a}}_1^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{b}}^T \\ \vdots \\ \underline{\tilde{a}}_n^T \end{pmatrix}$$

so sieht man, dass $det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}$ multilineare Abbildung ist.

$$det\ E_n = 1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

und der Vorzeichenwechsel bei Zeilentausch legen det als alternierende, normierte, multilineare Abbildung fest.

Kurze Wiederholung

$$det : \mathbb{R}^{(n,n)} \to \mathbb{R}$$

Definition: Rekursiv

$$det(a_{11}) = a_{11}$$

$$A \in \mathbb{R}^{(n,n)}, n \geq 2$$

$$det\,A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j}\, det\, A_{1j}$$

Berechnung:

$n = 2, 3$: Sarrusche Regel.

$n \geq 2$ allgemein

- Entwicklung nach beliebiger Zeile
- Entwicklung nach beliebiger Spalte
- Gauss-Algorithmus

$A \stackrel{\text{singulär}}{\longrightarrow} det\ A = 0$

$\downarrow$ regulär

$PA = L \cdot R$

$\underbrace{det\ P}_{(-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}}} \cdot det\ A = det\ L \cdot det\ R \cdot det\ A = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$

$$\Rightarrow det\ A = (-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}} \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

<u>Berechnung:</u>
$n = 2, 3$: Sarrusche Regel.

$n \geq 2$ allgemein

- Entwicklung nach beliebiger Zeile
- Entwicklung nach beliebiger Spalte
- Gauss-Algorithmus

$A \xrightarrow{\text{singulär}} \det A = 0$

$\downarrow$ regulär

$PA = L \cdot R$

$$\underbrace{\det P}_{(-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}}} \cdot \det A = \det L \cdot \det R \cdot \det A = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

$$\Rightarrow \det A = (-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}} \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

Berechnung:

$n = 2, 3$: Sarrusche Regel.

$n \geq 2$ allgemein

- Entwicklung nach beliebiger Zeile
- Entwicklung nach beliebiger Spalte
- Gauss-Algorithmus

$A \xrightarrow{\text{singulär}} \det A = 0$

$\downarrow$ regulär

$PA = L \cdot R$

$\underbrace{\det P}_{(-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}}} \cdot \det A = \det L \cdot \det R \cdot \det A = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$

$$\Rightarrow \det A = (-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}} \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

Berechnung:

$n = 2,3$: Sarrusche Regel.

$n \geq 2$ allgemein

- Entwicklung nach beliebiger Zeile
- Entwicklung nach beliebiger Spalte
- Gauss-Algorithmus

  $A \xrightarrow{\text{singulär}} \det A = 0$

  $\downarrow$ regulär

  $PA = L \cdot R$

  $\underbrace{\det P}_{(-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}}} \cdot \det A = \det L \cdot \det R \cdot \det A = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$

$$\Rightarrow \det A = (-1)^{\text{Anzahl Zeilentausche}} \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$$

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILEN} \\ \text{SPALTEN}\end{matrix}\right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE} \\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ zu einer anderen $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE} \\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE} \\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
- $det\ A^T = det\ A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{ \begin{matrix} \text{ZEILEN} \\ \text{SPALTEN} \end{matrix} \right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{ \begin{matrix} \text{ZEILE} \\ \text{SPALTE} \end{matrix} \right\}$ zu einer anderen $\left\{ \begin{matrix} \text{ZEILE} \\ \text{SPALTE} \end{matrix} \right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{ \begin{matrix} \text{ZEILE} \\ \text{SPALTE} \end{matrix} \right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
- $det\, A^T = det\, A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{\overset{\text{ZEILEN}}{\text{SPALTEN}}\right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{\overset{\text{ZEILE}}{\text{SPALTE}}\right\}$ zu einer anderen $\left\{\overset{\text{ZEILE}}{\text{SPALTE}}\right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{\overset{\text{ZEILE}}{\text{SPALTE}}\right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
- $det\ A^T = det\ A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILEN}\\\text{SPALTEN}\end{matrix}\right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\\text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ zu einer anderen $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\\text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\\text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
- $det\, A^T = det\, A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILEN}\\ \text{SPALTEN}\end{matrix}\right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ zu einer anderen $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
- $det\, A^T = det\, A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILEN}\\\text{SPALTEN}\end{matrix}\right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\\text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ zu einer anderen $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\\text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\\text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
- $det\, A^T = det\, A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Rechenregeln

- Vertauschen zweier $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILEN}\\ \text{SPALTEN}\end{matrix}\right\}$ ändert das Vorzeichen . (um -1)
- Addition eines Vielfachen einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ zu einer anderen $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ ändert *det A* nicht.
- Multiplikation einer $\left\{\begin{matrix}\text{ZEILE}\\ \text{SPALTE}\end{matrix}\right\}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert *det A* mit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = (det(A))^{-1}$
- $det\, A^T = det\, A$

Hiermit kann man noch eine Menge von Rechenregeln herleiten.
(Zur Anwendung in den nächsten Übungen) nur einige Beispiele:

Ist $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ Blockdreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{kk} \end{pmatrix}$$

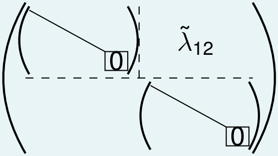
mit $A_{ii} \in \mathbb{R}^{(n_i,n_i)}$, so ist

$$det\, A = \prod_{i=1}^{k} det\, A_{ii}$$

Beweis: Nur für $k = 2$ notwendig. (Warum?)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Gauss 2. Zeilen}]{\text{Gauss 1. Zeilen}} \begin{pmatrix} R_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & R_{22} \end{pmatrix} \text{ wenn } A_{11}, A_{22} \text{ regulär}$$

wenn A_{11} singulär $\searrow$



wenn A_{22} singulär $\nearrow$

Determinante bleibt erhalten

$$\Rightarrow det\ A = det\ R_{11} \cdot det\ R_{22} = det\ A_{11} \cdot det\ A_{22} \qquad \square$$

Definition 5.22

Seien $t_1, \cdots, t_{n+1} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ Dann heißt

$$B := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Vandermondesche Matrix und *det B* Vandermondesche Determinante (zu $t_1, \cdots, t_{n+1}$)

Wozu die gut ist ?
z.B. zum Interpolieren!

Was das ist ? $\rightarrow$

Seite 183

Definition 5.22

Seien $t_1, \cdots, t_{n+1} \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ Dann heißt

$$B := \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

Vandermondesche Matrix und *det B* Vandermondesche Determinante (zu $t_1, \cdots, t_{n+1}$)

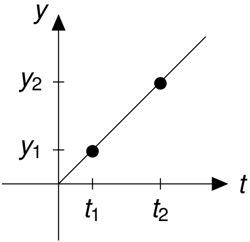
Wozu die gut ist ?
z.B. zum Interpolieren!

Was das ist ? $\rightarrow$

Durch zwei Datenpunkte geht genau eine Gerade.

Ansatz:

$$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1$$
$$y(t_1) = a_0 t_1^0 + a_1 t_1 \overset{!}{=} y_1$$
$$y(t_2) = a_0 t_2^0 + a_1 t_2 \overset{!}{=} y_2$$



Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Vandermonde (t_1, t_2)

Ansatz:

$$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n$$

$(n+1)$ Unbekannte $\underset{\text{legen fest}}{\longleftarrow}$ $(n+1)$ Bedingungen $y(t_i) = y_i$

$$\begin{pmatrix} t_1^0 & t_1^1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ t_{n+1}^0 & t_{n+1}^1 & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ Vandermonde System

Durch zwei Datenpunkte geht genau eine Gerade.

Ansatz:

$$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1$$

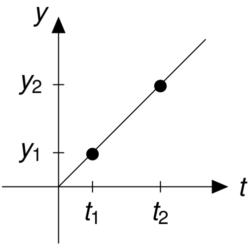
$$y(t_1) = a_0 t_1^0 + a_1 t_1 \stackrel{!}{=} y_1$$

$$y(t_2) = a_0 t_2^0 + a_1 t_2 \stackrel{!}{=} y_2$$

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Vandermonde (t_1, t_2)



Ansatz:

$$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n$$

$(n+1)$ Unbekannte $\underset{\text{legen fest}}{\longleftarrow}$ $(n+1)$ Bedingungen $y(t_i) = y_i$

$$\begin{pmatrix} t_1^0 & t_1^1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ t_{n+1}^0 & t_{n+1}^1 & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{Vandermonde System}$$

Durch zwei Datenpunkte geht genau eine Gerade.

Ansatz:

$$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1$$

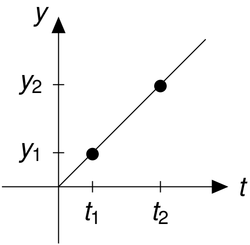
$$y(t_1) = a_0 t_1^0 + a_1 t_1 \overset{!}{=} y_1$$

$$y(t_2) = a_0 t_2^0 + a_1 t_2 \overset{!}{=} y_2$$

Lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Vandermonde (t_1, t_2)



Ansatz:

$$y(t) = a_0 t^0 + a_1 t^1 + \cdots + a_n t^n$$

$(n+1)$ Unbekannte $\underset{\text{legen fest}}{\longleftarrow}$ $(n+1)$ Bedingungen $y(t_i) = y_i$

$$\begin{pmatrix} t_1^0 & t_1^1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ t_{n+1}^0 & t_{n+1}^1 & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ Vandermonde System

Seite 183

Lemma 5.23

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i)$$

Lesehilfe

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} (t_2 - t_1) & (t_3 - t_1) & (t_4 - t_1) \\ \uparrow & (t_3 - t_2) & (t_4 - t_2) \\ | & \uparrow & (t_4 - t_3) \\ | & | & \uparrow \\ i = 1 & i = 2 & i = 3 \end{array}$$

Folgerung

$$det \text{ Vandermonde } (t_1, \cdots, t_{n+1}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t_i \neq t_j, i \neq j$$

Seite 183

Lemma 5.23

$$\det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i)$$

Lesehilfe

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} (t_2 - t_1) & (t_3 - t_1) & (t_4 - t_1) \\ \uparrow & (t_3 - t_2) & (t_4 - t_2) \\ | & \uparrow & (t_4 - t_3) \\ | & | & \uparrow \\ i = 1 & i = 2 & i = 3 \end{array}$$

Folgerung

$$\det \text{Vandermonde}\,(t_1, \cdots, t_{n+1}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t_i \neq t_j, i \neq j$$

Seite 183

Lemma 5.23

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_i)$$

Lesehilfe

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & t_1^3 \\ 1 & t_2 & t_2^2 & t_2^3 \\ 1 & t_3 & t_3^2 & t_3^3 \\ 1 & t_4 & t_4^2 & t_4^3 \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} (t_2 - t_1) & (t_3 - t_1) & (t_4 - t_1) \\ \uparrow & (t_3 - t_2) & (t_4 - t_2) \\ | & \uparrow & (t_4 - t_3) \\ | & | & \uparrow \\ i = 1 & i = 2 & i = 3 \end{array}$$

Folgerung

$$det \text{ Vandermonde } (t_1, \cdots, t_{n+1}) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$t_i \neq t_j, i \neq j$$

Beweis von Lemma 5.23 (Induktion)

$$n = 1 : \quad det \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1)$$

Sei Aussage für n-reihige Determinanten richtig. Dann:

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & t_2^2 - t_2 t_1 & \cdots & t_2^{n-1} - t_1 t_2^{n-2} & t_2^n - t_1 t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} - t_1 & t_{n+1}^2 - t_{n+1} t_1 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} - t_1 t_{n+1}^{n-2} & t_{n+1}^n - t_1 t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} t_2 - t_1 & (t_2 - t_1) t_2 & \cdots & (t_2 - t_1) t_2^{n-2} & (t_2 - t_1) t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ t_{n+1} - t_1 & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1} & \cdots & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-2} & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1} (t_j - t_1) \left(det \begin{pmatrix} 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} \ \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_1) \right) \square$$

Beweis von Lemma 5.23 (Induktion)

$$n = 1: \quad det \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1)$$

Sei Aussage für n-reihige Determinanten richtig. Dann:

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & t_2^2 - t_2 t_1 & \cdots & t_2^{n-1} - t_1 t_2^{n-2} & t_2^n - t_1 t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} - t_1 & t_{n+1}^2 - t_{n+1} t_1 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} - t_1 t_{n+1}^{n-2} & t_{n+1}^n - t_1 t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} t_2 - t_1 & (t_2 - t_1) t_2 & \cdots & (t_2 - t_1) t_2^{n-2} & (t_2 - t_1) t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ t_{n+1} - t_1 & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1} & \cdots & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-2} & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1} (t_j - t_1) \left(det \begin{pmatrix} 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_1) \right) \square$$

Beweis von Lemma 5.23 (Induktion)

$$n = 1 : \quad det \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1)$$

Sei Aussage für n-reihige Determinanten richtig. Dann:

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & t_2^2 - t_2 t_1 & \cdots & t_2^{n-1} - t_1 t_2^{n-2} & t_2^n - t_1 t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} - t_1 & t_{n+1}^2 - t_{n+1} t_1 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} - t_1 t_{n+1}^{n-2} & t_{n+1}^n - t_1 t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} t_2 - t_1 & (t_2 - t_1) t_2 & \cdots & (t_2 - t_1) t_2^{n-2} & (t_2 - t_1) t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ t_{n+1} - t_1 & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1} & \cdots & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-2} & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1} (t_j - t_1) \left(det \begin{pmatrix} 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_1) \right) \square$$

Beweis von Lemma 5.23 (Induktion)

$$n = 1 : \quad det \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1)$$

Sei Aussage für n-reihige Determinanten richtig. Dann:

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & t_2^2 - t_2 t_1 & \cdots & t_2^{n-1} - t_1 t_2^{n-2} & t_2^n - t_1 t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} - t_1 & t_{n+1}^2 - t_{n+1} t_1 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} - t_1 t_{n+1}^{n-2} & t_{n+1}^n - t_1 t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} t_2 - t_1 & (t_2 - t_1)t_2 & \cdots & (t_2 - t_1)t_2^{n-2} & (t_2 - t_1)t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ t_{n+1} - t_1 & (t_{n+1} - t_1)t_{n+1} & \cdots & (t_{n+1} - t_1)t_{n+1}^{n-2} & (t_{n+1} - t_1)t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1}(t_j - t_1) \left(det \begin{pmatrix} 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{j=i+1}^{n+1}(t_j - t_i) \right) \square$$

Beweis von Lemma 5.23 (Induktion)

$$n = 1: \quad det \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \end{pmatrix} = (t_2 - t_1)$$

Sei Aussage für n-reihige Determinanten richtig. Dann:

$$det \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} & t_2^n \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} & t_{n+1}^n \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & t_2 - t_1 & t_2^2 - t_2 t_1 & \cdots & t_2^{n-1} - t_1 t_2^{n-2} & t_2^n - t_1 t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & t_{n+1} - t_1 & t_{n+1}^2 - t_{n+1} t_1 & \cdots & t_{n+1}^{n-1} - t_1 t_{n+1}^{n-2} & t_{n+1}^n - t_1 t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= det \begin{pmatrix} t_2 - t_1 & (t_2 - t_1) t_2 & \cdots & (t_2 - t_1) t_2^{n-2} & (t_2 - t_1) t_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \\ t_{n+1} - t_1 & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1} & \cdots & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-2} & (t_{n+1} - t_1) t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \prod_{j=2}^{n+1} (t_j - t_1) \left(det \begin{pmatrix} 1 & t_2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & & & \\ 1 & t_{n+1} & \cdots & t_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=2}^{n+1} \prod_{j=i+1}^{n+1} (t_j - t_1) \right) \square$$

Seite 184

Korollar

Zu jedem Datensatz

t_1	t_2	$\cdots$	t_{n+1}
y_1	y_2	$\cdots$	y_{n+1}

mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ gibt es genau ein Polynom
$p \in \Pi_n \quad (p(t) = a_0 + a_1 t + \cdot + a_n t^n)$ mit $p(t_i) = y_i, i = 1, \cdots, n+1$

- Hinweis: Es muss p nicht unbedingt den Grad n haben. p hat höchstens diesen Grad
  $y_i = 1 \quad i = 1, \cdots, n+1$
  $\Rightarrow p(t) \equiv 1 \quad$ Grad 0
  $$\left.\begin{array}{l} y_i = 0, i = 1, \cdots, n+1 \\ \Rightarrow p(t) \equiv 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Korollar 5.24

Ein Polynom $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$ hat höchstens n Nullstellen, oder
$\alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n$

Seite 184

Korollar

Zu jedem Datensatz

t_1	t_2	$\cdots$	t_{n+1}
y_1	y_2	$\cdots$	y_{n+1}

mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ gibt es genau ein Polynom
$p \in \Pi_n \quad (p(t) = a_0 + a_1 t + \cdot + a_n t^n)$ mit $p(t_i) = y_i, i = 1, \cdots, n+1$

- Hinweis: Es muss p nicht unbedingt den Grad n haben. p hat höchstens diesen Grad
  $y_i = 1 \quad i = 1, \cdots, n+1$
  $\Rightarrow p(t) \equiv 1 \quad$ Grad 0
  $$\left.\begin{array}{l} y_i = 0, i = 1, \cdots, n+1 \\ \Rightarrow p(t) \equiv 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Korollar 5.24

Ein Polynom $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\, t^i$ hat höchstens n Nullstellen, oder
$\alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n$

Korollar

Zu jedem Datensatz

t_1	t_2	$\cdots$	t_{n+1}
y_1	y_2	$\cdots$	y_{n+1}

mit $t_i \neq t_j$ für $i \neq j$ gibt es genau ein Polynom
$p \in \Pi_n \quad (p(t) = a_0 + a_1 t + \cdot + a_n t^n)$ mit $p(t_i) = y_i, i = 1, \cdots, n+1$

- Hinweis: Es muss p nicht unbedingt den Grad n haben. p hat höchstens diesen Grad
  $y_i = 1 \quad i = 1, \cdots, n+1$
  $\Rightarrow p(t) \equiv 1$ Grad 0
  $\left.\begin{array}{l} y_i = 0, i = 1, \cdots, n+1 \\ \Rightarrow p(t) \equiv 0 \quad \forall t \end{array}\right\} \Rightarrow$

Korollar 5.24

Ein Polynom $p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$ hat höchstens n Nullstellen, oder
$\alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n$

Beweislein

Annahme p hat die $(n+1)$ Nullstellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$. Dann ist

$$p(t_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, n+1$$

also

$$p \equiv 0, \text{ d.h. } \alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n. \quad \square$$

Korollar 5.25

Stimmen zwei Polynome $p_1, p_2 \in \Pi_n$ in mindestens $n+1$ Punkten $t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1}$ überein, so ist $p_1 = p_2$.

Beweislein:

$p := p_1 - p_2$ Dann $p \in \Pi_n$ und $p(t_1) = p(t_2) \cdots = p(t_{n+1}) = 0$, also $p \equiv 0$, also $p_1 = p_2 \quad \square$

Beweislein

Annahme p hat die $(n+1)$ Nullstellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$. Dann ist

$$p(t_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, n+1$$

also

$$p \equiv 0, \text{ d.h. } \alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n. \quad \square$$

Korollar 5.25

Stimmen zwei Polynome $p_1, p_2 \in \Pi_n$ in mindestens $n+1$ Punkten $t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1}$ überein, so ist $p_1 = p_2$.

Beweislein:

$p := p_1 - p_2$ Dann $p \in \Pi_n$ und $p(t_1) = p(t_2) \cdots = p(t_{n+1}) = 0$, also $p \equiv 0$, also $p_1 = p_2$ $\square$

Beweislein

Annahme p hat die $(n+1)$ Nullstellen $t_1, \cdots, t_{n+1}$. Dann ist

$$p(t_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, n+1$$

also

$$p \equiv 0, \text{ d.h. } \alpha_i = 0, i = 0, \cdots, n. \quad \square$$

Korollar 5.25

Stimmen zwei Polynome $p_1, p_2 \in \Pi_n$ in mindestens $n+1$ Punkten $t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1}$ überein, so ist $p_1 = p_2$.

Beweislein:

$p := p_1 - p_2$ Dann $p \in \Pi_n$ und $p(t_1) = p(t_2) \cdots = p(t_{n+1}) = 0$,
also $p \equiv 0$, also $p_1 = p_2$ $\square$

Hinweis

Man berechnet die Koeffizienten $a_o, \cdots, a_n$ des Polynoms
$p(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \in \Pi_n$ mit
$p(t_i) = y_i, i = 1, \cdots, n+1$
Um Gottes Willen NICHT
aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Das ist

1. Rechenzeitaufwendig
2. Numerisch instabil
3. Geht es besser!

Hinweis

Man berechnet die Koeffizienten $a_o, \cdots, a_n$ des Polynoms
$p(t) = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n \in \Pi_n$ mit
$p(t_i) = y_i, i = 1, \cdots, n+1$
Um Gottes Willen NICHT
aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & t_{n+1} & t_{n+1}^2 & \cdots & t_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Das ist

1. Rechenzeitaufwendig
2. Numerisch instabil
3. Geht es besser!

Es folgen

- eine explizite Angabe der Inversen einer regulären Matrix
- eine explizite Lösungsformel für reguläre Gleichungssysteme (Cramersche Regel)

Beide Formeln benutzt man praktisch nur bis $n = 3$ und sonst nur für

THEORETISCHE ZWECKE!
Praktisch viel zu TEUER!

Seite 185

Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär definiere
$B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ durch

$$b_{ij} := (-1)^{i+j} det\ A_{ji} / det\ A$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$det\ A \cdot B = \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{pmatrix}$$

Seite 185

Zu $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ regulär definiere $B \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ durch

$$b_{ij} := (-1)^{i+j} det\ A_{ji} / det\ A$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$det\ A \cdot B = \begin{pmatrix} +|A_{11}| & -|A_{21}| & +|A_{31}| \\ -|A_{12}| & +|A_{22}| & -|A_{32}| \\ +|A_{13}| & -|A_{23}| & +|A_{33}| \end{pmatrix}$$

Seite 185

Satz 5.27

Behauptung: $B = A^{-1}$

Beweis von $B^{-1} = A$?

Einfach $A \cdot B = E$ finden:

Sei $C = A \cdot B$ Dann

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{ik}\ det\ A_{jk}\Big)/det\ A \\ &= \begin{cases} 1 \text{ für } i = j \\ 0 \text{ für } i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

$\square$

Seite 186

$Ax = b$, A regulär

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
x &= A^{-1}b \\
x_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(-1)}\, b_j = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, b_j\, det\, A_{ji} / det\, A \\
&= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, b_j\, det\, A_{ji} \right)}_{det\, B_i} / det\, A
\end{aligned}
$$

$B_i \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ entsteht aus A durch Ersetzen der $i - ten$ Spalte von A durch b.

Satz 5.29: Cramersche Regel

$$Ax = b \Rightarrow x_i = \frac{det\, B_i}{det\, A}$$

Seite 186

$Ax = b$, A regulär
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= A^{-1}b \\ x_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(-1)}\, b_j = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, b_j \, det\, A_{ji} / det\, A \\ &= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, b_j\, det\, A_{ji}\right)}_{det\, B_i} / det\, A \end{aligned}$$

$B_i \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ entsteht aus A durch Ersetzen der $i - ten$ Spalte von A durch b.

Satz 5.29: Cramersche Regel

$$Ax = b \Rightarrow x_i = \frac{det\, B_i}{det\, A}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{+3}{-1} = -3$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{+3}{-1} = -3$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{+3}{-1} = -3$$

Eine weitere Darstellung der Determinante

Seite 187

Interessant für theoretische Zwecke. Erhält man durch Einsetzen von

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{xj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot e^i$$

in

$$det\ A = det(a^1, a^2, \cdots, a^n) \qquad \forall_i$$

Endresultat:
Sei S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$. Dann

$$det\, A = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \cdot \underbrace{det(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})}_{\in \{+1,-1\}}$$

Definition

Permutation $(i_1, \cdots, i_n)$ ist gerade falls $(i_1, \cdots, i_n) \longrightarrow (1, \cdots, n)$ mit gerader Anzahl von Vertauschungen, sonst ungerade.

$$sign(i_1, \cdots, i_n) = \begin{cases} 1 & (i_1, \cdots, i_n) \text{ gerade} \\ -1 & (i_1, \cdots, i_n) \text{ ungerade} \end{cases}$$

Endresultat:
Sei S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, \cdots, n\}$. Dann

$$det\, A = \sum_{(i_1,\cdots,i_n) \in S_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \cdot \underbrace{det(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})}_{\in \{+1,-1\}}$$

Definition

Permutation $(i_1, \cdots, i_n)$ ist gerade falls $(i_1, \cdots, i_n) \longrightarrow (1, \cdots, n)$ mit gerader Anzahl von Vertauschungen, sonst ungerade.

$$sign(i_1, \cdots, i_n) = \begin{cases} 1 & (i_1, \cdots, i_n) \text{ gerade} \\ -1 & (i_1, \cdots, i_n) \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$det\ A = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} a_{i_1 1}\cdots a_{i_n n}\cdot sign(i_1,\cdots,i_n)$$

Man wird mit dieser Regel Determinanten nur zur Strafe berechnen (lassen).

Berechnen Sie einmal die Komplexität dieser Formel.

$$det\ A = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n} a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \cdot sign(i_1, \cdots, i_n)$$

Man wird mit dieser Regel Determinanten nur zur Strafe berechnen (lassen).

Berechnen Sie einmal die Komplexität dieser Formel.

Ende des WS 2011/2012