Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Numerische Simulation, E-10
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Sommersemester 2008

Numerische Verfahren

Übungen und Lösungen, Blatt 5

Aufgabe 1: (Thema: Kondition von Matrizen.)

Bestimmen Sie die Kondition der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Maximumnorm.

Wenn Ihnen das noch zu einfach war, bestimmen Sie doch einfach die Kondition der entsprechend aufgebauten $n \times n$ Matrix A_n bzgl. der Maximumnorm.

Immer noch zu einfach? Was ist die Kondition von A_n bzgl. der 1–Norm?

Lösung zu Aufgabe 1:

Die Kondition einer Matrix bzgl. einer Norm $\|\cdot\|$ ist definiert als

$$\kappa(A) := \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Entweder man sieht sofort, daß die Inverse von A durch die Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, oder (wir nehmen gleich den generellen $n \times n$ Fall) man rechnet es z.B. folgendermaßen aus. Zuerst schreiben wir A als Differenz zweier Matrizen:

$$A = E - N = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Nun gilt für „gewisse“ Matrizen in Analogie zum skalaren Fall, daß sich die Inverse einer Differenz $E - N$ als geometrische Reihe in N schreiben läßt:

$$(E - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} N^k.$$

(Um genau zu sein: diese sogenannte Neumann'sche Reihe konvergiert *genau dann*, wenn der Spektralradius von N kleiner als Eins ist, i.e., $\rho(N) < 1$.)

In unserem Fall ist die Summe endlich, da wir N als Verschiebungsoperator um Eins auffassen können, und nach n Verschiebungen die Matrix identisch Null wird. Als Beispiel und zum besseren Verständnis der Fall $n = 4$:

$$N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(Die Matrix N ist demnach *nilpotent*.) Also:

$$A^{-1} = (E-N)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} N^k = \sum_{k=0}^{n-1} N^k = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Kondition $\kappa_\infty(A_n)$ der Matrix A_n gegeben durch

$$\kappa_\infty(A_n) = \|A_n\|_\infty \cdot \|A_n^{-1}\|_\infty = 2 \cdot n = 2n.$$

In dem Spezialfall $n = 4$ ergibt sich die Konditionszahl 8.

Der letzte Teil der Aufgabe ist damit auch gleich erledigt, denn die Matrizen A_n und A_n^{-1} haben identische Maximumnorm und 1–Norm, damit hat A_n auch identische Kondition bzgl. dieser Normen:

$$\|A_n\|_1 = \|A_n\|_\infty = 2, \qquad \|A_n^{-1}\|_1 = \|A_n^{-1}\|_\infty = n, \qquad \kappa_1(A_n) = \kappa_\infty(A_n) = 2n.$$

Aufgabe 2: (Thema: Störungslemma.)

I) Für eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ möge gelten

$$\|E - A\| \leqslant \delta < 1.$$

Zeigen Sie, dass A regulär ist und geben Sie eine Schranke für $\|A^{-1}\|$ an.

II) Es seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, A regulär, und es gelte für eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch B regulär ist und dass

$$\|B^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}$$

gilt. Hinweis: Nutzen Sie, dass sich B schreiben lässt als

$$B = A\big(E + A^{-1}(B - A)\big).$$

Lösung zu Aufgabe 2:

I) Wir setzen $B := E - A$. Nach Voraussetzung gilt dann $\|B\| < 1$ und wir können das Störungslemma (Satz 4.25 im Skript) anwenden. Hiernach ist $E - B = A$ regulär und für $\|A^{-1}\|$ gilt

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \|E - A\|} \leqslant \frac{1}{1-\delta}.$$

II) Entsprechend des Hinweises ist die Matrix B genau dann regulär, wenn

$$E + A^{-1}(B - A)$$

invertierbar ist. Nach dem Störungslemma ist dies der Fall, wenn $\|A^{-1}(B - A)\| < 1$ ist. Dies gilt aber aufgrund der Voraussetzung, i.e.,

$$\|A^{-1}(B - A)\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|B - A\| < 1.$$

Ferner erhält man aus dem Störungslemma

$$\begin{aligned}\|B^{-1}\| &= \|\big(E + A^{-1}(B-A)\big)^{-1}A^{-1}\| \\ &\leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|\big(E + A^{-1}(B-A)\big)^{-1}\| \\ &\leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A-B)\|} \\ &\leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A-B\|}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3: (Thema: Singulärwertzerlegung.)

Die Matrix A hat die Singulärwertzerlegung

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:

a) den Rang von A,

b) den Kern von A,

c) das Bild von A,

d) die Schurnorm von A,

e) die Spektralnorm von A.

Lösung zu Aufgabe 3:

Der Rang r einer Matrix ist gleich der Anzahl der Singulärwerte ungleich Null, also in unserem Fall $r = 2$.

Der Kern von A ist die Menge der Vektoren, die auf die Null abgebildet werden:

$$\mathrm{Kern}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = 0\}.$$

Die Dimension des Kerns einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist gleich $n - r$, also in unserem Fall gleich $2 - 2 = 0$. Damit besteht der Kern nur aus dem Nullvektor (der notwendigerweise immer enthalten ist).

Das Bild von A ist die Menge der Vektoren y, die von A „erzeugt" werden:

$$\mathrm{Bild}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \,:\, y = Ax\}.$$

Das Bild einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^m$ und hat die Dimension r. Das Bild wird von den Links-Singulärvektoren zu den Singulärwerten ungleich Null aufgespannt:

$$\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Die Schurnorm ist unitär (orthogonal) invariant, also entspricht die Schurnorm von A der Schurnorm von Σ, also gilt:

$$\|A\|_S = \|\Sigma\|_S = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sigma_i^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{4}} \approx 2.0616.$$

Die Spektralnorm ist ebenfalls unitär (orthogonal) invariant, also entspricht ebenfalls die Spektralnorm von A der Spektralnorm von Σ, also gilt:

$$\|A\|_2 = \|\Sigma\|_2 = \sigma_1 = 2.$$

Diese Aufgabe diente nur dazu, abzufragen, ob Sie Satz 5.13 des Skriptes (Seite 70) verstanden haben.

Aufgabe 4: (Thema: Varianten der LR-Zerlegung.)

Bestimmen Sie für wachsende Dimensionen n die LR-Zerlegungen der Matrizen

```
A = rand(n);
```

mittels spaltenorientierter und zeilenorientierter LR-Zerlegung (Algorithmus 4.8 und 4.9 im Skript). Vergleichen Sie die benötigten Rechenzeiten. Was können Sie über die Art aussagen, in der unter Matlab Matrizen gespeichert werden?

Lösung zu Aufgabe 4:

Abbildung 1 zeigt den Zeitbedarf für die spaltenorientierte und die zeilenorientierte LR-Zerlegung für wachsende Dimensionen. Bei größeren Dimensionen wird der Unterschied

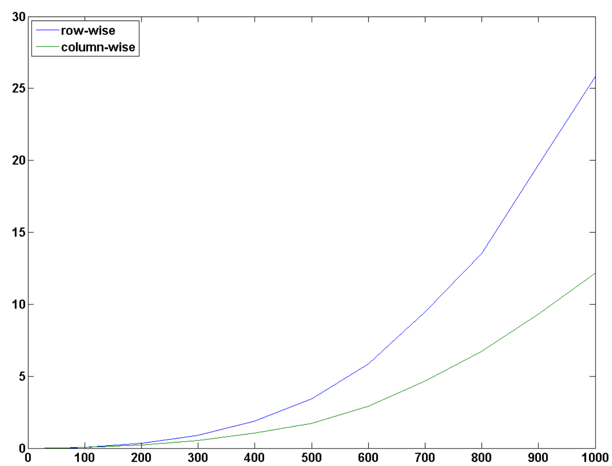

Abbildung 1: Zeitbedarf für zeilen- und spaltenorientierte LR-Zerlegung

zwischen der spaltenorientierten und zeilenorientierten LR-Zerlegung immer größer. Dies liegt daran, dass Matlab (in Anlehnung an Fortran) die Daten spaltenweise speichert, der Cache also bei der spaltenweisen LR-Zerlegung viel besser ausgenutzt wird.

Die Abbildung ist mittels der `m`-Dateien `LRdecomp.m` und `LRdecompScript.m` entstanden.