Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Numerische Simulation, E-10
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Sommersemester 2008

Numerische Verfahren

Übungen, Blatt 1

Aufgabe 1: (Thema: relativer und absoluter Fehler)

a) Von ARCHIMEDES wurden die Zahlen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ als obere und untere Schranken für π angegeben. Bestimmen Sie — nur unter Verwendung dieser Werte — Schranken für die *absoluten* und die *relativen* Fehler dieser Näherungen und ihres Mittelwertes.

Zur Rekapitulation:

Sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ eine Näherung für $x \in \mathbb{R}$, dann ist mittels

$$|x - \tilde{x}|$$

der absolute und über

$$\frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$$

der relative Fehler definiert.

b) Sie wissen von einer Größe $x \in \mathbb{R}$ nach einer Messung, dass $x \in [1.005, 1.015]$ gilt. Nun benötigen Sie den Wert $y := x^2 - 1$, wobei ein maximaler relativer Fehler von 1% nicht überschritten werden darf. Zeigen Sie, dass es nicht garantiert werden kann, dass jedes $\tilde{x}$ aus $[1.005, 1.015]$ der geforderten Fehlergüte genügt. Welchen relativen Fehler muss ein $\tilde{x} \in [1.005, 1.015]$ erfüllen, so dass doch die Genauigkeitsanforderungen an die Auswertung von y erfüllbar sind?

Aufgabe 2: (Thema: Rundungsfehler)

Gegeben Sei das Polynom

$$p(x) \;=\; (x-2)^{11}\,.$$

Berechnen Sie mit Hilfe der *Intervallhalbierung* die Nullstelle 2. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Programmieren Sie die Funktion zunächst in der *ausmultiplizierten Form*

```
x.^11-22*x.^10+220*x.^9-1320*x.^8+5280*x.^7-...
14784*x.^6+29568*x.^5-42240*x.^4+42240*x.^3-...
28160*x.^2+11264*x-2048
```

mit Hilfe des HORNER-Schemas. Wählen Sie als linken Startwert $\pi/2$ und als rechten Startwert π. Führen Sie die Intervallhalbierung durch, bis linker und rechter Intervallrand bis auf 10^{-5} zusammengerückt sind. (Hinweis: Über Sprachkonstrukte von Matlab können Sie sich allgemein mit `help lang` informieren. Es gibt so z.B. `while`-Schleifen.) Notieren Sie das Ergebnis. Probieren Sie nun verschiedene andere rechte Startwerte rechts von $x = 2$ aus, z.B. auch 2.2. Was beobachten Sie?

Was beobachten Sie dagegen, wenn Sie dasselbe mit dem Polynom in der Darstellung `(x-2).^11` machen? Versuchen Sie eine Erklärung.

Ein Hinweis zur Visualisierung: Plotten Sie beide Funktionen zunächst mittels `fplot` auf dem Intervall $[1.8, 2.2]$, dann mittels `plot` über dem Vektor x gegeben durch

```
x = linspace(1.8,2.2,8000);
```

Wählen Sie mit Hilfe der Funktion `axis` geeignete Ausschnitte und erklären Sie, was Sie dabei beobachten. Veranschaulichen Sie sich Ihre Beobachtung bei der Intervallhalbierung im Lichte dieses Resultats.

Aufgabe 3: (Thema: Polynominterpolation)

a) Es sei $M = M_1, \ldots, M_n$ Ihre Matrikelnummer. Nehmen Sie von dieser die letzten fünf Ziffern und bilden Sie mit diesen die Zahl $m = m_1, \ldots, m_5$ mit $m_i = M_{n-5+i}$, $i = 1, \ldots, 5$. Bestimmen Sie mit Hilfe von Matlab, aber ohne den Gebrauch der Funktionen `polyfit` oder `polyval` ein Polynom p, welches die Zahlen $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ auf die $i$te Ziffer m_i der Zahl m abbildet. Plotten Sie p auf dem Intervall $[1, 5]$.

b) Es sei nun

$$\tilde{m}_3 \;:=\; m_3 + \frac{1}{100}$$

Bestimmen Sie ein Polynom $\tilde{p}$, welches $i \in \{1, 2, 4, 5\}$ auf die $i$te Ziffer von m und die 3 auf $\tilde{m}_3$ abbildet. Plotten Sie die Fehlerfunktion $f := p - \tilde{p}$ auf dem Intervall $[0, 50]$.

c) Zeigen Sie, dass die Fehlerfunktion f nicht von Ihrer Matrikelnummer abhängt, dass f genau vier Nullstellen hat und berechnen Sie den Funktionsterm explizit.