Technische Universität Hamburg-Harburg
Institut für Numerische Simulation, E-10
Dr. Jens-Peter M. Zemke

Sommersemester 2008

Numerische Verfahren

Übungen, Blatt 4

Aufgabe 1: (Thema: Fehlerordnung von Kronrod-Formeln.)

Nach Skript gibt es zu einer n-Punkt Gauß-Formel stets die $(2n+1)$-Punkt Kronrod-Formel mit einer minimalen Fehlerordnung von $3n+2$. Zeigen Sie, dass die Fehlerordnung für ungerades n sogar $3n+3$ beträgt (Hinweis: Nutzen Sie aus, dass die Kronrod-Formeln symmetrisch sind—d.h. $\alpha_j = \alpha_{n-j+1}$, $\beta_l = \beta_{n-l}$, $x_j = -x_{n-j+1}$ und $y_l = -y_{n-l}$, $j = 1, \ldots, n$, $l = 0, \ldots, n$, nach der Notation im Skript. Argumentieren Sie nicht unter expliziter Benutzung der angegebenen Gewichte und Knoten bzw. greifen Sie in ihren Überlegungen ggf. nur für kleine n explizit auf diese zu).

Aufgabe 2: (Thema: Numerische Differentiation.)

Bestimmen Sie analog zu Beispiel 3.30, Seite 44 des Skriptes, für

$$h_j = 10^{-j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 8$$

für die beiden folgenden Formeln zur Differenzenapproximation

- Zentrale Differenzenapproximation der zweiten Ableitung, drei äquidistante Knoten:

$$f''(x) \approx \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2} =: \tilde{D}_2 f(x_j; h)$$

- Zentrale Differenzenapproximation der zweiten Ableitung, fünf äquidistante Knoten:

$$f''(x) \approx \frac{-y_{j+2} + 16y_{j+1} - 30y_j + 16y_{j-1} - y_{j-2}}{12h^2} =: \hat{D}_2 f(x_j; h)$$

die Approximationsfehler

$$\tilde{D}_2 f(x_j; h) - \frac{d}{dx^2} \cos(x)_{|x=x_j}$$
$$\hat{D}_2 f(x_j; h) - \frac{d}{dx^2} \cos(x)_{|x=x_j}$$

mit $x_j = 1$ zu verschiedenen Schrittweiten

$$h_j = 10^{-j}, \qquad j = 0, 1, \ldots, 8.$$

Plotten Sie die Ergebnisse analog zu Abbildung 3.4 und 3.5 (Seite 45) des Skriptes. Ermitteln Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes die Fehlerordnung $\tilde{m}$ der ersten Formel und verifizieren Sie diese am Plot. Schätzen Sie die Fehlerordnung $\hat{m}$ der zweiten Formel nur anhand des Plots.

Aufgabe 3: (Thema: LR-Zerlegung in endlicher Genauigkeit.) Lösen Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 110 & 1 \\ 100 & 11 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 110 \\ 110 \end{pmatrix}$$

in zweistelliger dezimaler Fließkommazahlenarithmetik, also unter

$$\mathrm{fl}(x \circ y) := \text{Rundung des Ergebnisses von } x \circ y \text{ auf zwei Stellen}$$

für jede Operation $\circ \in \{+, -, \cdot, /\}$, es gilt also z. B.

$$\mathrm{fl}(100 + 10) = 110, \quad \mathrm{fl}(120 + 3) = 120, \quad \mathrm{fl}(120 + 5) = 130,$$

mittels der LR-Zerlegung.