

Numerische Verfahren

Übungen, Blatt 5

Aufgabe 1: (Thema: Kondition von Matrizen.)

Bestimmen Sie die Kondition der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bzgl. der Maximumnorm.

Wenn Ihnen das noch zu einfach war, bestimmen Sie doch einfach die Kondition der entsprechend aufgebauten $n \times n$ Matrix A_n bzgl. der Maximumnorm.

Immer noch zu einfach? Was ist die Kondition von A_n bzgl. der 1-Norm?

Aufgabe 2: (Thema: Störungslemma.)

I) Für eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ möge gelten

$$\|E - A\| \leq \delta < 1.$$

Zeigen Sie, dass A regulär ist und geben Sie eine Schranke für $\|A^{-1}\|$ an.

II) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A regulär, und es gelte für eine durch eine Vektornorm induzierte Matrixnorm $\|\cdot\|$

$$\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch B regulär ist und dass

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|A - B\|}$$

gilt. Hinweis: Nutzen Sie, dass sich B schreiben lässt als

$$B = A(E + A^{-1}(B - A)).$$

Aufgabe 3: (Thema: Singulärwertzerlegung.)

Die Matrix A hat die Singulärwertzerlegung

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie:

- den Rang von A ,
- den Kern von A ,
- das Bild von A ,

- d) die Schurnorm von A ,
- e) die Spektralnorm von A .

Aufgabe 4: (Thema: Varianten der LR-Zerlegung.)

Bestimmen Sie für wachsende Dimensionen n die LR-Zerlegungen der Matrizen

$$A = \text{rand}(n);$$

mittels spaltenorientierter und zeilenorientierter LR-Zerlegung (Algorithmus 4.8 und 4.9 im Skript). Vergleichen Sie die benötigten Rechenzeiten. Was können Sie über die Art aussagen, in der unter Matlab Matrizen gespeichert werden?