

Klausur zur Vordiplom-Prüfung

Numerische Verfahren

22. Juli 2005

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT!!

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Vorname:	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Matr.-Nr.	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Ich bin darüber belehrt worden, dass meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte												

Σ

Aufgabe 1: (2+2+2+3 Punkte)

Was ist ein Einschrittverfahren und wozu dient es? Geben Sie das explizite Euler-Verfahren wieder und zeigen Sie, dass es von der Ordnung 1 ist.

Lösung zu Aufgabe 1: Ein Einschrittverfahren ist ein Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Funktionswerten einer durch eine Anfangswertaufgabe

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

implizit gegebenen Funktion $y = y(x)$. (2 Punkte)

Ein Einschrittverfahren hat dabei die Gestalt

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(x_n, y_n, h_n)$$

mit einer von der rechten Seite f der Anfangswertaufgabe abhängigen Verfahrensfunktion Φ . (2 Punkte)

Das explizite Euler-Verfahren hat die einfache Gestalt

$$y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n). \quad (2 \text{ Punkte})$$

Um zu zeigen, dass die Ordnung des expliziten Euler-Verfahrens gleich 1 ist, müssen wir zeigen, dass der lokale Fehler

$$\varepsilon_n = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h_n f(x_n, y(x_n)) = O(h_n^{p+1})$$

mit $p = 1$ erfüllt. Die Taylorentwicklung der unbekanntenen Funktion y an der Stelle x_n mit Restglied ist gegeben durch

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(\xi_n)}{2!}(x_{n+1} - x_n)^2, \quad (1)$$

wobei $\xi \in (x_n, x_{n+1})$ und die Entwicklung sicherlich nur möglich ist, wenn $y \in C^2[a, b]$ gilt, was wir aber ohne weiteres annehmen. Nun gilt nach der Differentialgleichung der Anfangswertaufgabe $y'(x) = f(x, y)$, also $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$ und der Abstand zwischen x_n und x_{n+1} ist gegeben durch $h_n = x_{n+1} - x_n$. Damit liest sich Gleichung (1) wie

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h_n f(x_n, y(x_n)) + \frac{y''(\xi_n)}{2!} h_n^2,$$

also verhält sich der lokale Fehler wie

$$\varepsilon_n = \frac{y''(\xi_n)}{2!} h_n^2 = O(h_n^2) = O(h_n^{1+1}).$$

Damit hat das explizite Euler-Verfahren die Ordnung 1. (3 Punkte)

Aufgabe 2: (2+3 Punkte)

Wann ist eine Matrix symmetrisch positiv definit? Geben Sie alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ an, für die die folgende Matrix positiv definit ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 2: Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann symmetrisch positiv definit, wenn sie symmetrisch ist und eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ außer dem Nullvektor,
- $\lambda > 0$ für alle Eigenwerte λ von \mathbf{A} ,
- $\det(\mathbf{A}_i) > 0$ für alle (führenden) Hauptunterabschnittsmatrizen \mathbf{A}_i von \mathbf{A} .

(2 Punkte)

Die Matrix \mathbf{A} ist, wie leicht zu sehen, symmetrisch. Alle Bedingungen führen zum Ziel. Der letzte Punkt ist am einfachsten zu verwenden, denn die erste führende Hauptunterabschnittsmatrix ist die Zahl $1 > 0$, und die Determinante von \mathbf{A} selbst ist gegeben durch

$$\det(\mathbf{A}) = 1 - \varepsilon^2.$$

Damit $\det(\mathbf{A}) > 0$ gilt, muss $\varepsilon^2 < 1$, also $\varepsilon \in (-1, 1)$ gelten. Damit ist die Matrix \mathbf{A} für alle $\varepsilon \in (-1, 1)$ symmetrisch positiv definit. (3 Punkte)

Aufgabe 3: (4+4 Punkte)

Konvergiert die Potenzmethode angewandt auf die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den Startvektoren \mathbf{v}^1 und \mathbf{v}^2 gegeben als

$$\mathbf{v}^1 = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T, \quad \mathbf{v}^2 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T?$$

Wenn ja, jeweils gegen welchen Vektor und welchen Eigenwert? Wie schnell?

Lösung zu Aufgabe 3: Wir bezeichnen die ersten beiden der obigen drei Matrizen mit

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Eine leichte Rechnung oder scharf hingucken oder einfach ausprobieren zeigt, dass die letzte Matrix gerade durch

$$\mathbf{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben ist, also gerade die Inverse von \mathbf{X} ist. Damit haben die Matrizen \mathbf{C} und $\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}$ die gleichen Eigenwerte. Die Eigenwerte von \mathbf{C} sind leicht ablesbar, da eine Matrix und ihre Transponierte die selben Eigenwerte haben, und da \mathbf{C}^T eine obere Dreiecksmatrix ist. Nach einem Lemma aus dem Skript liegen die Eigenwerte auf der Diagonalen von \mathbf{C}^T , also auf der Diagonalen von \mathbf{C} , und sind somit gegeben durch 1, 2, 3, 4. Damit ist mit \mathbf{C} auch \mathbf{B} diagonalisierbar. Die beiden Vektoren \mathbf{v}^1 und \mathbf{v}^2 sind gerade die letzte und erste Spalte von \mathbf{X} , mathematisch aufgeschrieben $\mathbf{v}^1 = \mathbf{X}\mathbf{e}^4$ und $\mathbf{v}^2 = \mathbf{X}\mathbf{e}^1$. Deshalb folgt für den ersten Vektor

$$\mathbf{B}\mathbf{v}^1 = \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{e}^4 = \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{e}^4 = 4\mathbf{X}\mathbf{e}^4 = 4\mathbf{v}^1.$$

Die Potenzmethode konvergiert also im nullten oder ersten Schritt (je nach Zählweise), da der Vektor \mathbf{v}^1 ein Eigenvektor zum Eigenwert 4 ist. (4 Punkte)

Für den zweiten Vektor ergibt sich im ersten Schritt

$$\mathbf{B}\mathbf{v}^2 = \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{e}^1 = \mathbf{X}\mathbf{C}\mathbf{e}^1 = \mathbf{X}(\mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^4) = \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2.$$

Der entstandene Vektor, und damit auch der erste Vektor, hat also Anteile an dem Eigenvektor zum Eigenwert 4, ist aber nicht gleich einem Eigenvektor, also wird die Potenzmethode mit (mindestens) der Konvergenzrate

$$C \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^j$$

gegen ein Vielfaches des Eigenvektors zum Eigenwert 4 konvergieren. (4 Punkte)

Man kann sogar zeigen, dass die Potenzmethode in diesem Falle schneller konvergiert, denn die erzeugten Vektoren haben nur Anteile am Eigenvektor zum Eigenwert 1 und zum Eigenwert 4, damit ist die tatsächliche Konvergenz proportional zu

$$C \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^j.$$

Im Allgemeinen gilt für die Potenzen von \mathbf{B} mal dem Startvektor \mathbf{v}^2 nämlich

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{B})^j \mathbf{v}^2 &= (\mathbf{X} \mathbf{C} \mathbf{X}^{-1})^j \mathbf{X} \mathbf{e}^1 = \mathbf{X} (\mathbf{C})^j \mathbf{X}^{-1} \mathbf{X} \mathbf{e}^1 = \mathbf{X} (\mathbf{C})^j \mathbf{e}^1 \\
 &= \mathbf{X} \left(\mathbf{e}^1 + \sum_{l=0}^j 4^l \mathbf{e}^4 \right) = \mathbf{v}^2 + \sum_{l=0}^j 4^l \mathbf{v}^1 \\
 &= 4^j \left(\left(\frac{1}{4} \right)^j \mathbf{v}^2 + \sum_{l=0}^j \left(\frac{1}{4} \right)^l \mathbf{v}^1 \right) \\
 &= 4^j \left(\left(\frac{1}{4} \right)^j \mathbf{v}^2 + \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^{j+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} \mathbf{v}^1 \right) \\
 &= 4^j \left(\left(\frac{1}{4} \right)^j \mathbf{v}^2 + \frac{4 - \left(\frac{1}{4} \right)^j}{3} \mathbf{v}^1 \right).
 \end{aligned}$$

Also gilt für die durch $1/4$ skalierte Matrix

$$\left(\frac{\mathbf{B}}{4} \right)^j \mathbf{v}^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^j \mathbf{v}^2 + \frac{4 - \left(\frac{1}{4} \right)^j}{3} \mathbf{v}^1 \rightarrow \frac{4}{3} \mathbf{v}^1.$$

Wenn Sie geantwortet haben, dass die asymptotische Konvergenzgeschwindigkeit durch $C \cdot (3/4)^j$ gegeben ist, haben Sie trotzdem alle Punkte in dem zugehörigen Teil erhalten.

Aufgabe 4: (2+2 Punkte)

Was ist Polynominterpolation? Geben Sie die allgemeine Newtonsche Form des Interpolationspolynomes an.

Lösung zu Aufgabe 4: Polynominterpolation ist die Lösung der Aufgabe, zu einer vorgegebenen Menge von paarweise verschiedenen Knoten (Stützstellen) $\{x_i\}_{i=0}^n$ und zugehörigen Funktionswerten $\{y_i\}_{i=0}^n$ ein Polynom p vom Höchstgrade n zu finden, so dass die Funktionswerte angenommen werden,

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2 \text{ Punkte})$$

Es gibt verschiedene Herangehensweisen. Eine ist die Newtonsche Form der Polynominterpolation, wobei das Polynom in der Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^n [x_0, \dots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k)$$

geschrieben wird und die Vorfaktoren, die sogenannten *dividierten Differenzen*, rekursiv gemäß

$$\begin{aligned}
 [x_j] &:= y_j, \\
 [x_k, \dots, x_j] &:= \frac{[x_{k+1}, \dots, x_j] - [x_k, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_k}, \quad j > k \geq 0
 \end{aligned}$$

berechnet werden. (2 Punkte)

Aufgabe 5: (4+4 Punkte)

Berechnen Sie die Interpolationspolynome zu den Daten

$$\frac{x_i}{y_i} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{array} \right. \quad \text{und} \quad \frac{x_i}{y_i} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 7 \end{array} \right.$$

Lösung zu Aufgabe 5: Diese Aufgabe läßt sich am Besten mit der Polynominterpolation nach Newton bearbeiten, da die ersten Datenpaaren in den zweiten enthalten sind. Die dividierten Differenzen zu den zweiten Datenpaaren berechnen sich wie folgt,

$$\begin{array}{llll} [1] = 8 & & & \\ [2] = 7 & [1, 2] = -1 & & \\ [3] = 6 & [2, 3] = -1 & [1, 2, 3] = 0 & \\ [4] = 7 & [3, 4] = 1 & [2, 3, 4] = 1 & [1, 2, 3, 4] = 1/3, \end{array}$$

wobei die dividierten Differenzen zu den ersten Datenpaaren in blau markiert sind, die für die zweiten Datenpaare neu hinzukommenden dividierten Differenzen sind rot markiert.

Das erste Interpolationspolynom ist gegeben durch

$$p_{1,2,3}(x) = 8 - (x - 1) = 9 - x, \quad (4 \text{ Punkte})$$

das zweite Interpolationspolynom durch

$$\begin{aligned} p_{1,2,3,4}(x) &= p_{1,2,3}(x) + [1, 2, 3, 4](x - 1)(x - 2)(x - 3) \\ &= 9 - x + \frac{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}{3} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{8}{3}x + 7. \end{aligned} \quad (4 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 6: (6 Punkte)

Berechnen Sie eine approximative Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf einem Rechner mit dreistelliger Rechnung.

Lösung zu Aufgabe 6: Es bietet sich die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung und anschließens Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen an. Die LR-Zerlegung

sieht folgendermaßen aus. Zuerst kommt eine Pivotisierung, in der die erste und zweite Zeile vertauscht werden:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 10^{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-4} \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}$$

Dann werden \mathbf{L} und \mathbf{R} berechnet gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \text{fl}(10^{-4}/1) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{R} &= \begin{pmatrix} 1 & 10^{-4} \\ 0 & \text{fl}(1 - 10^{-4} * 10^{-4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10^{-4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2 \text{ Punkte})$$

Als nächstes wird das System $\mathbf{L}\mathbf{y} = \mathbf{P}^T\mathbf{b}$ gelöst,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Demnach gilt $y_1 = 1$, $y_2 = \text{fl}(1 - 10^{-4} * 1) = 1$. (2 Punkte)

Das System $\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{y}$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^{-4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat auf dem Rechner die Lösung $x_2 = \text{fl}(1/1) = 1$, $x_1 = \text{fl}((1 - 10^{-4})/1) = 1$. (2 Punkte) Das Residuum $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist damit gegeben durch $\mathbf{r} = -10^{-4} \cdot \mathbf{b}$, einem Vektor in der Größenordnung der Maschinengenauigkeit.

Die volle Punktzahl haben Sie auch für andere Lösungswege bekommen, z.B. Berechnung der approximativen Lösung über die weniger stabile LR-Zerlegung ohne Pivotisierung oder die sehr stabile LR-Zerlegung mit vollständiger Pivotisierung.

Aufgabe 7: (2+2 Punkte)

Berechnen Sie für das Intervall $[0, 1]$ die Gewichte zu einer Quadraturformel mit mindestens der Ordnung 2 zu den Knoten $x_0 = 0.25$, $x_1 = 0.5$. Bestimmen Sie die Ordnung der erhaltenen Quadraturformel.

Lösung zu Aufgabe 7: Eine Quadraturformel zu vorgegebenen Knoten läßt sich mittels der Polynominterpolation nach Lagrange bestimmen. Sei $p(x)$ das Interpolationspolynom zu $f(x)$ an den Knoten x_0 und x_1 , dann gilt

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^1 f(x_i) \ell_i(x) = \sum_{i=0}^1 f(x_i) \int_0^1 \ell_i(x)$$

und wie leicht ersichtlich ist, sind die Integrale über die Lagrangebasispolynome die Gewichte der gesuchten Formel. Die gewünschte Ordnung folgt automatisch,

da die Interpolation eines Polynomes mit Höchstgrad 1 (allgemein n) an zwei (allgemein $n + 1$) Knoten das Polynom zurückgibt.

Die beiden Lagrangebasispolynome sind gegeben durch

$$\ell_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = 2 - 4x,$$

$$\ell_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 4x - 1.$$

Die Gewichte bestimmen sich also zu

$$\omega_0 = \int_0^1 \ell_0(x) dx = \int_0^1 2 - 4x dx = [2x - 2x^2]_0^1 = 0,$$

$$\omega_1 = \int_0^1 \ell_1(x) dx = \int_0^1 4x - 1 dx = [2x^2 - x]_0^1 = 1.$$

(2 Punkte)

Wir erhalten somit die altbekannte Rechteck- oder Mittelpunktsregel

$$R(f) = \sum_{i=0}^1 \omega_i f(x_i) = 0 \cdot f(0.25) + 1 \cdot f(0.5) = f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Diese hat, da sie effektiv ja nur einen Knoten nutzt, mit der bereits erreichten Ordnung 2 die *maximale* Ordnung, die sie haben kann (mit $n = 1$ Knoten die maximale Ordnung von $2n = 2$). Alternativ kann man dieses auch noch durch kurzes Nachrechnen überprüfen:

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \neq 0.$$

(2 Punkte)

Aufgabe 8: (2+3 Punkte)

Geben Sie den QR-Algorithmus in der Grundform wieder. Was gilt für die Eigenwerte der so erhaltenen Matrizen \mathbf{A}_i ?

Lösung zu Aufgabe 8: Der QR-Algorithmus zur näherungsweise Berechnung aller Eigenwerte einer quadratischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ lautet in der Grundform:

Setze $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.

Wiederhole für $i = 0, 1, \dots$

Berechne die QR-Zerlegung von \mathbf{A}_i : $\mathbf{A}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i$

Berechne die neue Iterierte \mathbf{A}_{i+1} : $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i$

(2 Punkte)

Die Matrizen \mathbf{A}_i und \mathbf{A}_{i+1} sind unitär ähnlich. Dieses kann man folgendermaßen zeigen. Wenn man die erste Gleichung nach \mathbf{R}_i auflöst, erhält man die Gleichung

$\mathbf{R}_i = \mathbf{Q}_i^H \mathbf{A}_i$. Eingesetzt in die zweite Gleichung erhält man $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_i^H \mathbf{A}_i \mathbf{Q}_i$, also gerade die Behauptung. Damit bleiben unter anderem alle Eigenwerte erhalten. (3 Punkte)

Aufgabe 9: (3+2+4 Punkte)

Geben Sie den QR-Algorithmus mit Shifts wieder. Wie werden die Shifts gewählt? Wie schnell konvergiert der QR-Algorithmus mit diesen Shifts für eine symmetrische reelle reguläre Matrix mit dem Betrage nach verschiedenen Eigenwerten?

Lösung zu Aufgabe 9: Der QR-Algorithmus mit Shifts lautet (Unterschiede zum QR-Algorithmus in der Grundform sind in Rot dargestellt):

Setze $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$.

Wiederhole für $i = 0, 1, \dots$

Berechne die QR-Zerlegung von $\mathbf{A}_i - \kappa_i \mathbf{I}$: $\mathbf{A}_i - \kappa_i \mathbf{I} = \mathbf{Q}_i \mathbf{R}_i$

Berechne die neue Iterierte \mathbf{A}_{i+1} : $\mathbf{A}_{i+1} = \mathbf{R}_i \mathbf{Q}_i + \kappa_i \mathbf{I}$

(3 Punkte)

Die Shifts κ_i werden als das letzte Matrixelement der letzten Zeile von \mathbf{A}_i , also als das Element $a_{nn}^{(i)}$ gewählt. (2 Punkte)

Diese Wahl entspricht dem Rayleigh-Quotienten von implizit im QR-Algorithmus konstruierten Vektoren einer inversen Iteration mit denselben Shifts. Durch diese Verbindung ist klar, dass die Vektoren und damit die Eigenwertapproximationen für symmetrische reelle reguläre Matrizen mit dem Betrage nach verschiedenen Eigenwerten *kubisch* konvergieren. (4 Punkte)

Aufgabe 10: (3+4+3 Punkte)

Konvergieren die Iterierten aus dem Newton-Verfahren für die Funktionen

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = 5x - 5$$

mit dem Startwert $x_0 = 1$? Wenn Sie dieses bejahen können, wogegen und wie schnell?

Lösung zu Aufgabe 10: Im Falle der ersten Funktion rechnet man schnell nach, dass die Iterierten des Newton-Verfahrens gemäß

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2}{2x_k} = x_k - \frac{x_k}{2} = \frac{x_k}{2}$$

gebildet werden. Damit gilt

$$x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

und die Konvergenz gegen die doppelte Nullstelle $\hat{x} = 0$ ist linear. (3 Punkte)

Im Falle der zweiten Funktion gilt

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\sqrt{x_k}}{\frac{1}{2}\sqrt{x_k}-1} = x_k - 2x_k = -x_k.$$

Damit folgt für die Iterierten

$$x_k = (-1)^k$$

und das Verfahren konvergiert nicht. (4 Punkte)

Sollten Sie darauf hingewiesen haben, dass das Newton-Verfahren implizit (wegen $\sqrt{-1}$) einen Umweg über die komplexen Zahlen macht, und somit nicht anwendbar ist, haben Sie auch Ihre Punkte bekommen.

Im Falle der dritten und letzten Funktion sieht man, dass die Funktion eine Gerade beschreibt, somit das Newton-Verfahren in einem Schritt konvergiere, aber bei noch genauerem Hinsehen stellt sich heraus, dass der Startwert bereits die eindeutige Nullstelle ist. Von Konvergenz zu sprechen macht also kaum Sinn. (3 Punkte)

Aufgabe 11: (5+2 Punkte)

Sie haben 10000 Meßwerte gegeben. Diese Meßwerte haben in etwa die Gestalt einer verschmierten Parabel (eine Parabel ist eine Funktion der Gestalt $ax^2 + bx + c$). Beschreiben Sie, wie Sie das zugehörige Ausgleichsproblem aufstellen. Wie lösen Sie das entstehende Ausgleichsproblem?

Lösung zu Aufgabe 11: Gesucht sind die 3 Parameter a, b, c , die eindeutig die gesuchte Parabel beschreiben. Also kennen wir von dem gewünschten Ausgleichsproblem

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = \min$$

bereits die Gestalt von \mathbf{x} ,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Es fehlen die Matrix \mathbf{A} und die rechte Seite \mathbf{b} . Wir bezeichnen die Parabel momentan mit $p(x) = ax^2 + bx + c$. Nun soll in dieser Aufgabenstellung erreicht werden, dass

$$p(x_i) \approx y_i,$$

genauer gesagt,

$$\sum_{i=1}^{10000} (p(x_i) - y_i)^2 = \min.$$

Das ist aber bereits fast unser gewünschtes Ausgleichsproblem:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{10000} (p(x_i) - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^{10000} (x_i^2 \cdot a + x_i^1 \cdot b + x_i^0 \cdot c - y_i)^2 \\ &= \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{10000}^2 & x_{10000} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{10000} \end{pmatrix}.$$

Das wirkliche Ausgleichsproblem entsteht durch Ziehen der Wurzel. (5 Punkte)
Um das Ausgleichsproblem zu lösen, böten sich aufgrund der niedrigen Dimension von \mathbf{x} sogar mal die Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

an, da die Systemmatrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ jetzt die Größe 3×3 hat. Allerdings ist die Möglichkeit, das System mittels der QR-Zerlegung zu lösen, zu bevorzugen, denn die Verwendung der Normalgleichungen resultiert in einer nicht notwendigen Quadrierung der Konditionszahl. Dazu wird zuerst \mathbf{A} QR-zerlegt:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \mathbf{R},$$

wobei $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{10000 \times 3}$ orthonormale Spalten hat und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Wir ergänzen (theoretisch) die Matrix \mathbf{Q} zu einer Orthonormalbasis des gesamten \mathbb{R}^{10000} und stecken die verbleibenden Vektoren in eine Matrix $\mathbf{Q}^\perp \in \mathbb{R}^{10000 \times 9997}$. Damit wird das Ausgleichsproblem transformiert,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 &= \|\mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 = \|(\mathbf{Q} \quad \mathbf{Q}^\perp)^T (\mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{x} - \mathbf{b})\|_2 \\ &= \|\mathbf{R} \mathbf{x} - \mathbf{Q}^T \mathbf{b}\|_2 + \|(\mathbf{Q}^\perp)^T \mathbf{b}\|_2. \end{aligned}$$

Der erste Teil ist ein kleines lineares Gleichungssystem welches wir nun einfach lösen können, der zweite Teil hängt nicht von \mathbf{x} ab und beschreibt den Defekt. (2 Punkte)

Aufgabe 12: (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & & \\ & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2 + h_3}{3} & \dots & & \\ & & \frac{h_3}{6} & \dots & & \\ & & & \dots & \frac{h_{n-1}}{6} & \\ & & & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1} + h_n}{3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

für jede Wahl von positiven h_j , $j = 0, 1, \dots, n$ regulär ist.

Lösung zu Aufgabe 12: Es handelt sich bei der angegebenen Matrix um eine Matrix, die bei den kubischen Splines entsteht. Diese ist laut Skript regulär. Ein leichter Beweis der Regularität funktioniert über den Satz von Gerschgorin: Keiner der Kreise

$$\left| \frac{h_j + h_{j+1}}{3} - z \right| \leq \left| \frac{h_j}{6} \right| + \left| \frac{h_{j+1}}{6} \right| = \frac{h_j + h_{j+1}}{6} = \frac{1}{2} \frac{h_j + h_{j+1}}{3}$$

kann die Null enthalten, die Null also kein Eigenwert sein und somit ist die Matrix regulär. (5 Punkte)