

Klausur zur Vordiplom-Prüfung

Numerische Verfahren

28. August 2009

Sie haben **90** Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer in DRUCKSCHRIFT.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **Druckschrift** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein.

Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Vorname:	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Matr.-Nr.	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Ich bin darüber belehrt worden, dass meine Ausarbeitung nur dann als Prüfungsleistung bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

(Unterschrift)

Lösen Sie die folgenden 12 Aufgaben!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Punkte												

Σ	
----------	--

Aufgabe 1: (4+4 Punkte)

Skizzieren Sie in einem doppellogarithmischen Maßstab den Betrag der Funktion

$$f(h) = \text{fl} \left(\cos(1) - \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h} \right),$$

wobei $h \in [10^{-16}, 1]$. Die Notation $\text{fl}(\text{term})$ steht für die Auswertung des Termes **term** von links nach rechts und ansonsten nach den üblichen Rechenregeln in doppelt genauer Fließkommazahlenarithmetik auf einem Rechner nach IEEE 754-Standard, also mit einer Maschinengenauigkeit von $2^{-53} \approx 1.110 \cdot 10^{-16}$. Sie können annehmen, dass der relative Fehler bei der Auswertung des Sinus oder Kosinus in der Größenordnung von 10^{-16} liegt. Wo ungefähr liegt das Minimum des Betrages der Funktion f im Intervall $[10^{-16}, 1]$?

Lösung zu Aufgabe 1: Der Sinus hat bei Eins die konvergente Reihenentwicklung

$$\begin{aligned} \sin(1+h) &= \sin(1)\cos(h) + \cos(1)\sin(h) \\ &= \sin(1) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{h^{2j}}{(2j)!} \right) + \cos(1) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{h^{2j+1}}{(2j+1)!} \right) \\ &\approx \sin(1) \left(1 - \frac{h^2}{2} \right) + \cos(1) \left(h - \frac{h^3}{6} \right), \quad h \ll 1. \end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\text{fl}(\sin(1+h)) = \sin(1+h)(1+\epsilon_1) \quad \text{und} \quad \text{fl}(\sin(1)) = \sin(1)(1+\epsilon_2)$$

mit $\epsilon_1, \epsilon_2 = \mathcal{O}(10^{-16})$ gilt also

$$\begin{aligned} \text{fl}(\sin(1+h) - \sin(1)) &\approx \\ \sin(1) \left(1 - \frac{h^2}{2} \right) (1+\epsilon_1) - \sin(1)(1+\epsilon_2) + \cos(1) \left(h - \frac{h^3}{6} \right) (1+\epsilon_1) &= \\ \sin(1) \left(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \frac{h^2}{2}(1+\epsilon_1) \right) + \cos(1) \left(h - \frac{h^3}{6} \right) (1+\epsilon_1), & \end{aligned}$$

also mit $\epsilon_3 = \epsilon_2 - \epsilon_1 = \mathcal{O}(10^{-16})$

$$\begin{aligned} \text{fl} \left(\frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h} \right) &\approx \\ \sin(1) \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{h} - \frac{h}{2}(1+\epsilon_1) \right) + \cos(1) \left(1 - \frac{h^2}{6} \right) (1+\epsilon_1) &\approx \\ \sin(1) \left(\frac{-\epsilon_3}{h} - \frac{h}{2} \right) + \cos(1) \left(1 - \frac{h^2}{6} \right) (1+\epsilon_1), & \end{aligned}$$

also mit $\text{fl}(\cos(1)) = \cos(1)(1 + \epsilon_4)$, $\epsilon_4 = \mathcal{O}(10^{-16})$

$$\begin{aligned} \text{fl} \left(\cos(1) - \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h} \right) &\approx \\ \sin(1) \left(\frac{\epsilon_3}{h} + \frac{h}{2} \right) + \cos(1)(1 + \epsilon_4) - \cos(1) \left(1 - \frac{h^2}{6} \right) (1 + \epsilon_1) &= \\ \sin(1) \left(\frac{\epsilon_3}{h} + \frac{h}{2} \right) + \cos(1) \left(\epsilon_4 - \epsilon_1 + \frac{h^2}{6}(1 + \epsilon_4) \right) &\approx \\ \mathcal{O} \left(\frac{10^{-16}}{h} + h + 10^{-16} \right). & \end{aligned}$$

Die beiden ersten Funktionen innerhalb des \mathcal{O} haben den Zehnerlogarithmus

$$\log_{10} \left(\frac{10^{-16}}{h} \right) = -16 - \log_{10}(h), \quad \log_{10}(h) = +\log_{10}(h)$$

sind also beide linear in $\log_{10}(h)$ und haben die entgegengesetzten Steigungen ± 1 . Die zusammengesetzte Funktion sieht so aus wie die Überlagerung der beiden linearen Funktionen, wir erhalten die Abbildung 1. (4 Punkte)

Das Minimum der Funktion

$$g(h) = \frac{10^{-16}}{h} + h, \quad g'(h) = 1 - \frac{10^{-16}}{h^2}$$

wird bei $h = \sqrt{10^{-16}} = 10^{-8}$ angenommen. (4 Punkte)

Aufgabe 2: (7 Punkte)

Geben Sie das Interpolationspolynom für den Datensatz

$$\begin{array}{c|ccccc} x_i & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y_i & 3 & 4 & 1 & 6 & 7 \end{array}$$

an. Bitte beachten Sie: Es ist ausdrücklich nicht verlangt, das Polynom auf die Gestalt $p_4(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i$ zu bringen.

Lösung zu Aufgabe 2: Es handelt sich um die Summe eines skalierten Lagrange-Basispolynomes und der linearen Funktion $x + 5$, genauer, um $x + 5 - 4\ell_2(x)$. Das Polynom ist als Summe der linearen Funktion $x + 5$ und $-4\ell_2(x)$ wegen

$$\begin{aligned} \ell_2(x) &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^4 (x - x_i) \Big/ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 2}}^4 (x_2 - x_i) \\ &= \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(2)(1)(-1)(-2)} \\ &\left(= \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{4}x^2 + 1 \right) \end{aligned}$$

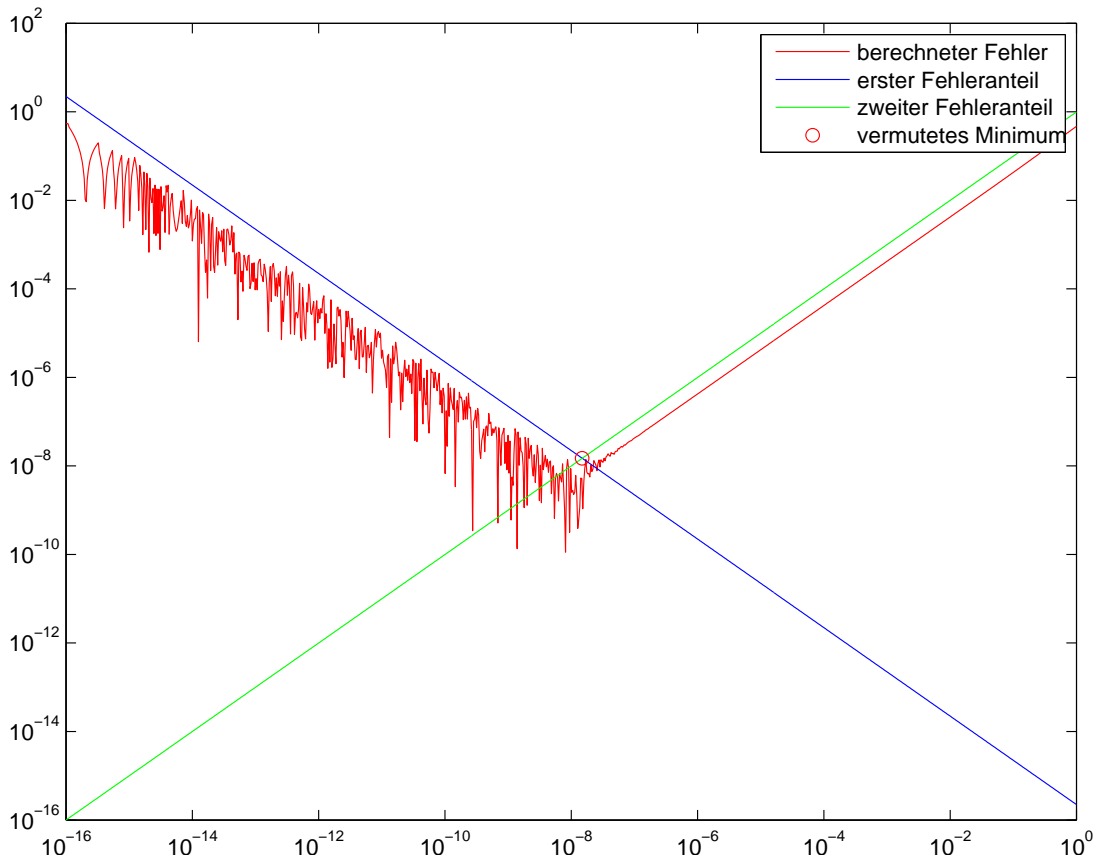


Abbildung 1: Fehlerverhalten bei der numerischen Differentiation

gegeben als

$$x + 5 - 4\ell_2(x) = x + 5 - 4 \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(2)(1)(-1)(-2)} \quad (7 \text{ Punkte})$$

$$\left(= -x^4 + 5x^2 + x + 1. \right)$$

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Geben Sie für den Datensatz

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	3	4	1	6	7

den Funktionswert des zugehörigen Interpolationspolynomes $p_4(x)$ an der Stelle $\tilde{x} = 1/2$ an.

Lösung zu Aufgabe 3: Wir haben eben das Interpolationspolynom berechnet.

Einsetzen von $\tilde{x} = 1/2 = 0.5$ ergibt nach kurzer Rechnung:

$$\begin{aligned} 0.5 + 5 - 4\ell_2(0.5) &= 5.5 - 4 \frac{(0.5 + 2)(0.5 + 1)(0.5 - 1)(0.5 - 2)}{(2)(1)(-1)(-2)} \\ &= \frac{43}{16} = 2.6875. \end{aligned} \quad (5 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 4: (5+5 Punkte)

Was ist eine Quadraturformel? Berechnen Sie eine Approximation des Integrales

$$\int_0^1 x^{19} dx = \left[\frac{x^{20}}{20} \right]_0^1 = \frac{1}{20} = 0.05.$$

Lösung zu Aufgabe 4: Eine Quadraturformel ist eine Formel zur numerischen Annäherung eines Integrales, welche auf Funktionsauswertungen der Funktion unter dem Integral basiert und allgemein (in der Vorlesung „Numerische Verfahren“) die Gestalt

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{j=0}^n \omega_j f(x_j)$$

hat. Die Angabe der Stützstellen $\{x_j\}_{j=0}^n$ und der Gewichte $\{\omega_j\}_{j=0}^n$ bestimmt in eindeutiger Weise eine Quadraturformel. (5 Punkte)

Die Mittelpunkt- oder Rechteckregel liefert als approximativen Wert des Integrales

$$\int_0^1 x^{19} dx \approx \frac{1}{2^{19}} = \frac{1}{524288} \approx 1.9073 \cdot 10^{-6},$$

die Trapezregel liefert

$$\int_0^1 x^{19} dx \approx \frac{1}{2} (0^{19} + 1^{19}) = \frac{1}{2} = 0.5,$$

und die Simpson-Regel liefert

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{19} dx &\approx \frac{1}{6} \left(1 \cdot 0^{19} + 4 \cdot \frac{1}{2^{19}} + 1 \cdot 1^{19} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2^{17}} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{3 \cdot 2^{18}} + \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1 + 2^{17}}{3 \cdot 2^{18}} = \frac{43691}{2^{18}} = \frac{43691}{262144} \approx 0.1666679382 \approx \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

War eine solche (oder andere, ähnliche) Näherung angegeben worden, so ergab dieses 5 Punkte.

Aufgabe 5: (7 Punkte)

Geben Sie die Polynominterpolation nach Lagrange oder Newton wieder.

Lösung zu Aufgabe 5: Die Lagrangsche Interpolation zu den Datenpaaren $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ ist eine Vorschrift, um das eindeutige Polynom p vom Höchstgrad n zu berechnen, das die Interpolationsbedingungen

$$p(x_j) = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

erfüllt. Es läßt sich leicht explizit angeben als

$$p(x) = \sum_{j=0}^n y_j \ell_j(x),$$

wobei die Lagrangeschen Basispolynome ℓ_j gegeben sind durch die Interpolationspolynome zu den speziellen Aufgaben

$$\ell_j(x_i) = \delta_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

und explizit angegeben lauten

$$\ell_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x - x_i) \bigg/ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (x_j - x_i), \quad j = 0, \dots, n. \quad (7 \text{ Punkte})$$

Die Newtonsche Interpolationsformel zur Interpolation der Datenpaare $\{(x_j, y_j)\}_{j=0}^n$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i \neq j$ ist gegeben durch die Formel

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n [x_0, \dots, x_j] \prod_{k=0}^{j-1} (x - x_k),$$

wobei die sogenannten dividierten Differenzen $[x_i, \dots, x_j]$ rekursiv definiert sind durch

$$\begin{aligned} [x_j] &:= y_j, \\ [x_i, \dots, x_j] &:= \frac{[x_{i+1}, \dots, x_j] - [x_i, \dots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}, \quad j > i \geq 0. \end{aligned} \quad (7 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 6: (6+4 Punkte)

Berechnen Sie die Pseudonormallösungen der folgenden Ausgleichsprobleme:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min, \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min.$$

Lösung zu Aufgabe 6: Die Lösung des ersten Ausgleichsproblem es ist nicht eindeutig. Aus den (logischer- und notwendigerweise singulären) Normalgleichungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

sieht man aber sofort, dass der Vektor

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine spezielle Lösung ist. Dieses ist auch die Lösung mit kürzestmöglicher Länge, da die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x}_\alpha = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{x}_0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

für alle $\alpha \neq 0$ echt länger als $\|\mathbf{x}_1\|_2$ ist, da

$$\|\mathbf{x}_\alpha\|_2^2 = \|\mathbf{x}_1\|_2^2 + 2\alpha \underbrace{\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0 \rangle}_{=0} + \alpha^2 \|\mathbf{x}_0\|_2^2 > \|\mathbf{x}_1\|_2^2 \quad \forall \alpha \neq 0.$$

Also ist \mathbf{x}_1 gerade die gesuchte Pseudonormallösung. (6 Punkte)

Die aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Spalten der zweiten Matrix eindeutige Lösung des zweiten Ausgleichsproblem es liest man ab zu

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4 \text{ Punkte})$$

oder rechnet Sie mittels der Normalgleichungen oder der QR-Zerlegung aus.

Aufgabe 7: (5+4+7 Punkte)

Sei $i = \sqrt{-1}$. Welche der Matrizen

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1001 & -1000 \\ -1000 & 1001 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = (i^2), \quad \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch positiv definit? Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 7: Alle Matrizen sind symmetrisch. Die Matrix \mathbf{A}_1 hat den doppelten (Spalten- und Zeilen-) Geršgorin-Kreis

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1001| \leq 1000\},$$

aufgrund der Symmetrie $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^T$ von \mathbf{A}_1 liegen also beide Eigenwerte im Intervall $[1, 2001]$, sind also beide positiv und \mathbf{A}_1 demnach positiv definit. (5 Punkte)

Die Matrix \mathbf{A}_2 hat den führenden Hauptminor

$$\det(i^2) = -1 < 0,$$

ist also nicht positiv definit. (4 Punkte)

Die Matrix \mathbf{A}_3 hat die (Spalten- und Zeilen-) Geršgorin-Kreise

$$\begin{aligned} K_1 &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 3\}, \\ K_2 &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - 4| \leq 3\} = K_1, \\ K_3 &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - 3| \leq 2\} \subset K_1, \end{aligned}$$

aufgrund der Symmetrie $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_3^T$ von \mathbf{A}_3 liegen also alle drei Eigenwerte im Intervall $[1, 7]$, sind also alle drei positiv und \mathbf{A}_3 demnach positiv definit. (7 Punkte)

Aufgabe 8: (4+4+6 Punkte)

Geben Sie den QR-Algorithmus in der Grundform und mit Shifts wieder. Was bedeutet die im Skript genannte Konvergenz „im Wesentlichen“?

Lösung zu Aufgabe 8: Der QR-Algorithmus mit Shifts ist gegeben durch

Für $j = 0, 1, \dots$ (bis zur Konvergenz oder zur gewünschten Genauigkeit)
 wähle einen Shift κ_j (z. B. das Element rechts unten in \mathbf{A}_j)
 QR-zerlege $(\mathbf{A}_j - \kappa_j \mathbf{E}) = \mathbf{Q}_j \mathbf{R}_j$
 bilde $\mathbf{A}_{j+1} = \mathbf{R}_j \mathbf{Q}_j + \kappa_j \mathbf{E}$ (4 Punkte)

Der QR-Algorithmus ohne Shifts ist durch die Wahl der Shifts als $\kappa_j = 0$ im QR-Algorithmus mit Shifts gegeben. (4 Punkte)

Die Konvergenz im Wesentlichen bedeutet, dass nur der untere Dreiecksanteil der solcherart erzeugten Matrizen \mathbf{A}_j gegen das Gewünschte konvergiert: Die Elemente auf der Diagonalen konvergieren gegen die Eigenwerte und die unterhalb der Diagonalen gegen Null. Über die Elemente im oberen Dreieck wird dabei keine Aussage getroffen. (6 Punkte)

Aufgabe 9: (4+4+4 Punkte)

Sei $i = \sqrt{-1}$ die imaginäre Einheit. Geben Sie die (ungefähre) Lage der Eigenwerte der folgenden Matrizen an:

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_3 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung zu Aufgabe 9: Man kann immer den Satz von Geršgorin verwenden. An der Matrix \mathbf{B}_1 liest man aber die Eigenwerte zu 1 und 0 auf der Diagonalen ab. (4 Punkte)

Die Matrix \mathbf{B}_2 ist schief-Hermitesch, m. a. W., es gilt

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^H = \begin{pmatrix} \bar{i} & \bar{i} \\ \bar{i} & \bar{0} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -i & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} i & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Demnach sind alle Eigenwerte rein imaginär. Nach dem Satz von Geršgorin liegen sie in der Vereinigung der beiden Kreise

$$\begin{aligned} S_1 &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - i| \leq 1\}, \\ S_2 &:= \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| \leq 1\}, \end{aligned}$$

liegen also im rein imaginären Intervall $[-i, 2i]$. Die wirklichen Eigenwerte sind

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}i, \quad \begin{aligned} \lambda_- &\approx -0.61803i, \\ \lambda_+ &\approx 1.61803i. \end{aligned} \quad (4 \text{ Punkte})$$

Die Matrix \mathbf{B}_3 ist gleich der Matrix \mathbf{A}_3 aus Aufgabe 7, also sind die Eigenwerte von \mathbf{B}_3 laut der Lösung von Aufgabe 7 enthalten im Intervall $[1, 7]$. (4 Punkte)

Die wirklichen Eigenwerte und Eigenvektoren kann man auch berechnen. Ein Eigenpaar ist gegeben durch den leicht erkennbaren Eigenvektor

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} 2$$

zum Eigenwert 2, die anderen beiden Eigenvektoren müssen zu

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

senkrecht sein, da die Matrix \mathbf{B}_3 ja symmetrisch, also normal, also unitär diagonalisierbar ist. Diese beiden Eigenvektoren setzen wir also an als

$$\mathbf{v}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

mit zu bestimmendem α und β . Eine längere Rechnung zeigt dann, dass die Vektoren

$$\mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \cdot 17 + 8\sqrt{17} \\ 2 \cdot 17 + 8\sqrt{17} \\ 17 + 5\sqrt{17} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 3 - \sqrt{17} \\ 3 - \sqrt{17} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren zu den Eigenwerten

$$\lambda_2 := \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \approx 6.561552813, \quad \lambda_3 := \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \approx 2.438447187$$

sind.

Aufgabe 10: (6+6 Punkte)

Es sei eine Matrix \mathbf{A} und ein Startvektor \mathbf{u}^0 gegeben als

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}^0 = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Was passiert bei Anwendung der Potenzmethode mit Normierungsvektor

$$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Falls Konvergenz eintritt: Wie schnell konvergieren die Vektoren \mathbf{u}^i aus der Potenzmethode gegen welchen Eigenvektor? Falls keine Konvergenz eintritt: Wieso nicht?

Lösung zu Aufgabe 10: Die Matrix \mathbf{A} hat die Jordan-Normalform \mathbf{J} ,

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{J}.$$

Es handelt sich also um eine Matrix mit zweimal dem gleichen Eigenwert 1. Es gibt nur den einzigen Eigenvektor $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$, welcher auf dem gegebenen Normierungsvektor $\boldsymbol{\ell}$, welches der Hauptvektor ist, senkrecht steht.

Die Anwendung der Potenzmethode liefert die Iterierten

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= \mathbf{A}\mathbf{u}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & k_1 &= \boldsymbol{\ell}^T \mathbf{v}^1 = 1, & \mathbf{u}^1 &= \mathbf{v}^1/k_1 = \mathbf{v}^1, \\ \mathbf{v}^2 &= \mathbf{A}\mathbf{u}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & k_2 &= \boldsymbol{\ell}^T \mathbf{v}^2 = 1, & \mathbf{u}^2 &= \mathbf{v}^2/k_2 = \mathbf{v}^2, \\ \mathbf{v}^3 &= \mathbf{A}\mathbf{u}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, & k_3 &= \boldsymbol{\ell}^T \mathbf{v}^3 = 1, & \mathbf{u}^3 &= \mathbf{v}^3/k_3 = \mathbf{v}^3, \end{aligned}$$

allgemein gilt

$$\mathbf{v}^j = \mathbf{A}\mathbf{u}^{j-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}, \quad k_j = \boldsymbol{\ell}^T \mathbf{v}^j = 1, \quad \mathbf{u}^j = \mathbf{v}^j/k_j = \mathbf{v}^j,$$

also konvergieren die Vektoren \mathbf{u}^j nach einer Normierung in der Maximumnorm gegen den Eigenvektor,

$$\frac{\mathbf{u}^j}{\|\mathbf{u}^j\|_\infty} = \begin{pmatrix} \frac{1}{j} \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6 \text{ Punkte})$$

Die Vektoren \mathbf{u}^j aus der Potenzmethode konvergieren also linear gegen ein unnormalisiertes Vielfaches des einzigen Eigenvektors. Die Skalare sind konstant gleich dem einzigen Eigenwert Eins. (6 Punkte)

Aufgabe 11: (6+6 Punkte)

Was ist die inverse Iteration? Es seien die Matrix \mathbf{A} und der Startvektor \mathbf{u}^0 aus der letzten Aufgabe gegeben. Wie schnell konvergiert die inverse Iteration mit dem Normierungsvektor

$$\boldsymbol{\ell} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit gemäß

$$\kappa_i = \frac{(\mathbf{u}^i)^H \mathbf{A} \mathbf{u}^i}{(\mathbf{u}^i)^H \mathbf{u}^i}$$

aufdatiertem Shift? Der Startshift sei hierbei (wie üblich) gewählt als

$$\kappa_0 = \frac{(\mathbf{u}^0)^H \mathbf{A} \mathbf{u}^0}{(\mathbf{u}^0)^H \mathbf{u}^0} = 1.$$

Sie brauchen bezüglich der Konvergenzgeschwindigkeit nur eine begründete Vermutung zu äußern, die inverse Iteration wird nämlich bei reiner Handrechnung schnell rechenaufwändig.

Lösung zu Aufgabe 11: Sei eine Matrix \mathbf{A} und ein Startvektor \mathbf{u}^0 gegeben. Eine Variante der inversen Iteration (mit aufdatiertem Shift) ist gegeben durch die Schleife

Für $j = 0, 1, \dots$ (bis zur Konvergenz oder zur gewünschten Genauigkeit)
 wähle einen Shift κ_j
 löse $(\mathbf{A} - \kappa_j \mathbf{E}) \mathbf{v}^{j+1} = \mathbf{u}^j$
 normiere: $\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{v}^{j+1} / \boldsymbol{\ell}^T \mathbf{v}^{j+1}$ (oder $\mathbf{u}^{j+1} = \mathbf{v}^{j+1} / \|\mathbf{v}^{j+1}\|_2$)

Für die Beschreibung des Algorithmus bekam man 6 Punkte.

Zuerst sollte das Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - \kappa_0 \mathbf{E}) \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{u}^0$$

nach \mathbf{v}^1 gelöst werden, dieses Gleichungssystem hat aber keine Lösung, da die rechte Seite nicht im Raum aufgespannt von den Spalten von $\mathbf{A} - \kappa_0 \mathbf{E}$ liegt. Damit bricht die inverse Iteration im ersten Schritt zusammen, obwohl der Rayleigh-Quotient bereits gleich dem einzigen Eigenwert 1 ist. (6 Punkte)

Aufgabe 12: (5+6+6 Punkte)

Berechnen Sie die Pseudoinversen der folgenden drei Matrizen:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_{n,m} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & m-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Bei der letzten Matrix sind die Elemente der ersten Zeile gleich den natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \dots, m$, alle anderen Elemente gleich Null, und es soll die Pseudoinverse für alle $n, m \in \mathbb{N}$ angegeben werden. Wenn Ihnen diese allgemeine Fragestellung Probleme bereitet, so setzen Sie $n = 4$ und $m = 2$. Dann erhalten Sie bei der richtigen Antwort nur 4 von den möglichen 6 Punkten.

Lösung zu Aufgabe 12: Es handelt sich bei allen drei Aufgabenteilen um eine Matrix der letzten Matrizenklasse, da

$$\mathbf{K} = \mathbf{M}_{3,1} \quad \text{und} \quad \mathbf{N} = \mathbf{M}_{3,2}.$$

Daher reicht es aus, nur den letzten Teil (diesen dann aber in voller Allgemeinheit) zu beantworten. Die Matrix $\mathbf{M}_{n,m}$ hat, falls $m > 1$, den Rang Eins und die ökonomische Variante der Singulärwertzerlegung (SVD) ist, mit dem ersten Standardbasisvektor $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ und dem Vektor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^m$ gegeben als

$$\mathbf{n} = (0 \quad 1 \quad 2 \quad \cdots \quad m-1)^T,$$

gegeben durch

$$\mathbf{M}_{n,m} = (\mathbf{e}_1)(\|\mathbf{n}\|_2) \left(\frac{1}{\|\mathbf{n}\|_2} \mathbf{n}^T \right),$$

also ist die Pseudoinverse gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{n,m}^\dagger &= \left(\frac{1}{\|\mathbf{n}\|_2} \mathbf{n} \right) \left(\frac{1}{\|\mathbf{n}\|_2} \right) (\mathbf{e}_1)^T = \frac{1}{\|\mathbf{n}\|_2^2} \mathbf{M}_{n,m}^T \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{n}\|_2^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m-1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \end{aligned} \quad (6+6 \text{ Punkte})$$

Die quadrierte Norm $\|\mathbf{n}\|_2^2$ läßt sich auch noch explizit angeben, es gilt

$$\|\mathbf{n}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{m-1} k^2 = \frac{2m^3 - 3m^2 + m}{6}.$$

Ist nun aber $m = 1$, so handelt es sich bei $\mathbf{M}_{n,1}$ um einen Nullvektor der Länge n , welcher als Pseudoinverse den transponierten Nullvektor hat. Insbesondere gilt

$$\mathbf{K}^\dagger = \mathbf{K}^T = (0 \ 0 \ 0). \quad (5 \text{ Punkte})$$

ANMERKUNG: Dieses war die letzte Klausur zur Vorlesung „Numerische Verfahren“, welche jemals geschrieben wurde. Jens-Peter M. Zemke (2009)